Probabilità e Statistica (15/06/2012)

(Ing. Civ. - Trasp. - Amb. Terr. - Elettr., Roma; esame da 3 o 4 crediti: esercizi 1,2,3,4)
(esame da 6 crediti: risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X,Y), con $X \geq 0,\ 0 \leq Y \leq \frac{X}{2}$, è $f(x,y) = axe^{-x-y}$, per $x \geq 0, 0 \leq y \leq \frac{x}{2}$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Calcolare la costante a e le densità marginali $f_1(x)$, per $x > 0$, ed $f_2(y)$, per $y > 0$.

   $a =$ $\qquad$ $f_1(x) =$ $\qquad$ $f_2(y) =$

2. Una macchina produce pezzi in serie, ognuno dei quali è difettoso con probabilità $p \in (0,1)$. Definiti gli eventi $E_i =$ *"l'i-mo pezzo è difettoso"*, giudicati stocasticamente indipendenti, e considerato un lotto L formato dai primi due pezzi, stabilire se gli eventi $A = E_1E_2$ e $B = E_1 \vee E_2$ sono correlati, oppure no. Inoltre, definiti gli eventi $H_r =$ *"L contiene r pezzi difettosi"*, $r = 0,1,2$, calcolare la probabilità condizionata β che i pezzi siano entrambi difettosi, supposto vero l'evento $C =$ *"un pezzo estratto a caso da L risulta difettoso"*.

   Correlazione ? $\qquad$ $\beta =$

3. La densità di probabilità di un numero aleatorio continuo $X \in [1,3]$ è $f(x) = a(x-1)$, per $x \in [1,2]$, $f(x) = a(3-x)$, per $x \in [2,3]$, con $f(x) = 0$ altrove. Calcolare la costante a e la funzione di ripartizione $F(x)$.

   $a =$ $\qquad$ $F(x) =$

4. Considerato un vettore aleatorio discreto $(X,Y) \in \{(-2,0),(0,0),(2,0),(0,-2),(0,2)\}$, con $P(X=0,Y=0) = p \in (0,1)$, si assuma che gli altri 4 punti abbiano tutti probabilità a. Stabilire se X e Y sono: (i) incorrelati; (ii) indipendenti.

   Incorrelati ? $\qquad$ *Indipendenti ?*

5. Con riferimento all'esercizio precedente, assumendo $p = \frac{1}{2}$, calcolare la funzione caratteristica e la varianza del numero aleatorio $Z = X + Y$.

   $\varphi_Z(t) =$ $\qquad$ $\sigma_Z^2 =$

6. Un sistema è costituito da due dispositivi in serie, con tempi aleatori di durata X e Y rispettivamente. La densità congiunta di (X,Y) è $f(x,y) = 9ye^{-x-3y}$, per $x \geq 0\,,\ y \geq 0$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Indicando con Z il tempo aleatorio di durata del sistema, calcolare la funzione di sopravvivenza $S_Z(z)$ e la funzione di rischio $h_Z(z)$ di Z, per ogni $z > 0$.

   $S_Z(z) =$ $\qquad$ $h_Z(z) =$

7. Da un'urna, contenente 2 palline bianche e 2 nere, si effettuano 3 estrazioni senza restituzione. Verificare che gli eventi $E_i =$ *"l'i-ma pallina estratta è bianca"*, $i = 1,2,3$, sono scambiabili.

   E_1, E_2, E_3 *scambiabili ?*

Probabilità e Statistica (Ing. Civ. - Trasp. - Amb. Terr. - Elettr., Roma)
Soluzioni della prova scritta del 15/06/2012.

1. Fissato $x > 0$, si ha: $f_1(x) = \int_0^{\frac{x}{2}} axe^{-x-y}dy = axe^{-x} \int_0^{\frac{x}{2}} e^{-y}dy =$

$$= axe^{-x}(1 - e^{-\frac{x}{2}}) = axe^{-x} - axe^{-\frac{3}{2}x} = a \cdot xe^{-x} - \frac{4}{9}a \cdot \frac{9}{4}xe^{-\frac{3}{2}x} = a \cdot G_{2,1}(x) - \frac{4}{9}a \cdot G_{2,\frac{3}{2}}(x)\,;$$

ovvero, f_1 è una combinazione lineare, con coefficienti $a, -\frac{4}{9}a$, di due densità gamma, la prima di parametri $c = 2, \lambda = 1$, la seconda di parametri $c = 2, \lambda = \frac{3}{2}$, con

$$\int_0^{+\infty} f_1(x)dx = a \int_0^{+\infty} G_{2,1}(x)dx - \frac{4}{9}a \int_0^{+\infty} G_{2,\frac{3}{2}}(x)dx = a - \frac{4}{9}a = \frac{5}{9}a = 1\,;$$

pertanto $a = \frac{9}{5}$. Inoltre, fissato $y > 0$, osservando che

$$\int_{2y}^{+\infty} xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_{2y}^{+\infty} + \int_{2y}^{+\infty} e^{-x}dx = 2ye^{-2y} + e^{-2y}\,,$$

si ha: $f_2(y) = \int_{2y}^{+\infty} \frac{9}{5}xe^{-x-y}dx = \frac{9}{5}e^{-y} \int_{2y}^{+\infty} xe^{-x}dx = \frac{9}{5}e^{-y}(2ye^{-2y} + e^{-2y}) =$

$$= \frac{18}{5}ye^{-3y} + \frac{9}{5}e^{-3y} = \frac{2}{5} \cdot 9ye^{-3y} + \frac{3}{5} \cdot 3e^{-3y} = \frac{2}{5} \cdot G_{2,3}(y) + \frac{3}{5} \cdot G_{1,3}(y)\,;$$

ovvero f_2 è una combinazione lineare, con coefficienti $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}$, di una densità gamma, di parametri $c = 2, \lambda = 3$, e di una densità esponenziale, di parametro $\lambda = 3$.

2. A e B sono correlati se $P(A|B) \neq P(A)$. Si ha $P(A) = p^2 > 0$, $P(B) = 2p - p^2 < 1$, $\forall p < 1$; allora: $P(A|B) = P(E_1E_2 \,|\, E_1 \vee E_2) = \frac{P(E_1E_2)}{P(E_1 \vee E_2)} = \frac{P(A)}{P(B)} > P(A)$; pertanto A e B sono correlati positivamente.
Inoltre, posto $1 - p = q$ e osservando che $H_0 = E_1^cE_2^c$, $H_1 = E_1E_2^c \vee E_1^cE_2$, $H_2 = E_1E_2$, con $P(H_0) = q^2$, $P(H_1) = 2pq$, $P(H_2) = p^2$, $P(C|H_0) = 0$, segue

$$\beta = P(E_1E_2 \,|\, C) = P(H_2|C) = \frac{P(H_2)P(C|H_2)}{P(H_1)P(C|H_1) + P(H_2)P(C|H_2)} = \frac{p^2 \cdot 1}{2pq \cdot \frac{1}{2} + p^2 \cdot 1} = p\,.$$

3. Dev'essere: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$; ovvero: $\int_1^2 a(x-1)dx + \int_2^3 a(3-x)dx = \cdots = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = 1$; pertanto $a = 1$. Inoltre, ricordando che $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, per $x \leq 1$ si ha $F(x) = 0$; per $x \geq 3$ si ha $F(x) = 1$; per $x \in (1,2)$ si ha $F(x) = \int_1^x (t-1)dt = \frac{(x-1)^2}{2}$; infine, per $x \in [2,3)$ si ha

$$F(x) = \int_1^2 (t-1)dt + \int_2^x (3-t)dt = \frac{1}{2} + 3x - \frac{x^2}{2} - 4 = 3x - \frac{x^2}{2} - \frac{7}{2}\,.$$

4. Essendo $4a + p = 1$, ciascuno dei 4 punti distinti da $(0,0)$ ha probabilità $a = \frac{1-p}{4}$; pertanto si ha $X \in \{-2,0,2\}$, $Y \in \{-2,0,2\}$, con $P(X=0) = P(Y=0) = \frac{1+p}{2}$, $P(X=-2) = P(X=2) = \frac{1-p}{4}$, $P(Y=-2) = P(Y=2) = \frac{1-p}{4}$. Allora $\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y) = 0$; inoltre, il prodotto XY vale certamente 0, quindi $\mathbb{P}(XY) = 0$; pertanto $Cov(X,Y) = \mathbb{P}(XY) - \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y) = 0$, ovvero X e Y sono incorrelati. I numeri aleatori X e Y non sono stocasticamente indipendenti, come risulta osservando, ad esempio, che

$$P(X=0, Y=0) = p \;\neq\; \frac{1+p}{2} \cdot \frac{1+p}{2} = P(X=0)P(Y=0)\,.$$

5. Si ha $Z \in \{-2, 0, 2\}$, con $P(Z=0) = \frac{1}{2}$, $P(Z=-2) = P(Z=2) = \frac{1}{4}$; pertanto

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{P}(e^{itZ}) = \frac{1}{4}e^{-2it} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{2it} = \cdots = \frac{1 + cos(2t)}{2},$$

con $\varphi_Z'(t) = -sen(2t)$, $\varphi_Z''(t) = -2cos(2t)$. Allora

$$\mathbb{P}(Z) = \frac{\varphi_Z'(0)}{i} = \frac{0}{i} = 0\,, \quad \mathbb{P}(Z^2) = \frac{\varphi_Z''(0)}{i^2} = \frac{-2}{-1} = 2\,, \quad \sigma_Z^2 = \mathbb{P}(Z^2) - [\mathbb{P}(Z)]^2 = 2\,.$$

In alternativa: $\mathbb{P}(Z) = \frac{1}{4} \cdot (-2) + \frac{1}{4} \cdot 2 = 0$, $\mathbb{P}(Z^2) = \frac{1}{4} \cdot (-2)^2 + \frac{1}{4} \cdot 2^2 = 2$, $\sigma_Z^2 = 2$.

6. Si ha $Z = min\,\{X, Y\}$ e quindi $(Z > z) = (X > z, Y > z)$. Allora, osservando che

$$\int_z^{+\infty} 9ye^{-3y}dy = [-3ye^{-3y}]_z^{+\infty} + \int_z^{+\infty} 3e^{-3y}dy = 3ze^{-3z} + e^{-3z} = (1+3z)e^{-3z}\,,$$

per ogni fissato $z > 0$, si ha

$$S_Z(z) = P(Z > z) = P(X > z, Y > z) = \int_z^{+\infty}\int_z^{+\infty} 9ye^{-x-3y}dxdy =$$

$$= \int_z^{+\infty} e^{-x}\left(\int_z^{+\infty} 9ye^{-3y}dy\right)dx = (1+3z)e^{-3z}\int_z^{+\infty} e^{-x}dx = (1+3z)e^{-4z}\,;$$

pertanto

$$h_Z(z) = \frac{f_Z(z)}{S_Z(z)} = -\frac{S_Z'(z)}{S_Z(z)} = \frac{(1+12z)e^{-4z}}{(1+3z)e^{-4z}} = \frac{1+12z}{1+3z} = 4 - \frac{3}{1+3z}\,, \quad \forall\, z > 0\,.$$

7. Per verificare la scambiabilità occorre controllare le seguenti uguaglianze

$$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3)\,, \quad P(E_1E_2) = P(E_1E_3) = P(E_2E_3)\,.$$

Si ha

$$P(E_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\,, \; P(E_2) = P(E_1E_2) + P(E_1^cE_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{2}\,,$$

$$P(E_3) = P(E_1E_2E_3) + P(E_1E_2^cE_3) + P(E_1^cE_2E_3) + P(E_1^cE_2^cE_3) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{2}\,;$$

inoltre $P(E_1E_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, con

$$P(E_1E_3) = P(E_1E_2E_3) + P(E_1E_2^cE_3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6} = P(E_1E_2)\,,$$

$$P(E_2E_3) = P(E_1E_2E_3) + P(E_1^cE_2E_3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6} = P(E_1E_2)\,.$$

Pertanto, E_1, E_2, E_3 sono scambiabili.