Probabilità e Statistica (16/07/2012)

(Ing. Civ. - Trasp. - Amb. Terr. - Elettr., Roma; esame da 3 o 4 crediti: esercizi 1,2,3,4)
(esame da 6 crediti: risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Da un'urna U, contenente 5 palline bianche e 5 nere, si estraggono in blocco n palline, con $n < 4$, delle quali un numero aleatorio X sono bianche. Calcolare: (i) per quali valori di n la varianza di X è uguale a $\frac{7}{12}$; (ii) la probabilità condizionata α che fra le n palline al massimo una sia bianca, supposto che almeno una sia bianca, verificando che $\alpha = \frac{5}{7}$ per $n = 2$.

   $n \in$ $\alpha =$

2. La densità di probabilità di un numero aleatorio continuo $X \in [0, 3]$ è $f(x) = a$, per $x \in [0, 1] \cup [2, 3]$, $f(x) = \frac{1}{2}$, per $x \in (1, 2)$, con $f(x) = 0$ altrove. Calcolare la costante a, la previsione m di X e i valori x tali che $F(x) > \frac{3}{4}$.

   $a =$ $m =$ $x \in$

3. Dato un vettore aleatorio continuo (X, Y), con densità $f(x, y) = 2e^{-x-2y}$ per $x \geq 0, y \geq 0$, e con $f(x, y) = 0$ altrove, stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti. Inoltre, posto $Z = X - Y$, calcolare σ_Z^2 e, fissato $z > 0$, la probabilità $p = P(Z \leq z)$.

   Indipendenza ? $\sigma_Z^2 =$ $p =$

4. Dato un vettore aleatorio discreto $(X, Y) \in \{(-1, -2), (-1, 2), (0, -1), (0, 1), (1, -2), (1, 2)\}$, con $P(X = 0, Y = -1) = P(X = 0, Y = 1) = a$ e con gli altri punti ugualmente probabili fra di loro, calcolare i valori che si possono assegnare ad a. Inoltre, calcolare il coefficiente di correlazione tra X e Y e stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti.

   $a \in$ $\rho =$ *Indipendenza* ?

5. Con riferimento all'esercizio precedente, assumendo $a = \frac{1}{4}$, calcolare la funzione caratteristica e la varianza del numero aleatorio $Z = Y - X$.

   $\varphi_Z(t) =$ $\sigma_Z^2 =$

6. Con riferimento all'esercizio 3, calcolare la funzione di sopravvivenza e la funzione di rischio del numero aleatorio $T = 3Y$.

   $S_T(t) =$ $h_T(t) =$

7. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio Θ è normale con parametri $m_0 = 0$, $\sigma_0 = 2\sqrt{2}$. Le componenti di un campione casuale $(X_1, \ldots, X_4)$, subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione normale con valor medio θ e scarto standard $\sigma = 2$. Supposto di aver osservato un campione casuale $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_4)$, con $x_1 + \cdots + x_4 = 4$, calcolare (utilizzando la distribuzione finale di Θ) la probabilità p dell'evento condizionato $(\Theta \leq \frac{8+6\sqrt{2}}{9} \,|\, \Theta \leq \frac{8+12\sqrt{2}}{9}; \mathbf{x})$.

   $p =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civ. - Trasp. - Amb. Terr. - Elettr., Roma)
Soluzioni della prova scritta del 16/07/2012.

1. Si ha $X \sim H(10, n, \frac{1}{2})$, con $Var(X) = \frac{n}{4}(1 - \frac{n-1}{9}) = \frac{n(10-n)}{36} = \frac{7}{12}$ per $n = 3$. Inoltre

$$\alpha = P(X \leq 1 | X \geq 1) = \frac{P(X \leq 1, X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X = 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X = 1)}{1 - P(X = 0)} =$$

$$= \frac{\frac{\binom{5}{1}\binom{5}{n-1}}{\binom{10}{n}}}{1 - \frac{\binom{5}{0}\binom{5}{n}}{\binom{10}{n}}} = \frac{5\binom{5}{n-1}}{\binom{10}{n} - \binom{5}{n}},$$ con $\alpha = \frac{5}{7}$ per $n = 2$.

2. Si ha
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 a dx + \int_1^2 \frac{1}{2} dx + \int_2^3 a dx = 2a + \frac{1}{2} = 1\,;$$
pertanto: $a = \frac{1}{4}$. Inoltre
$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{4} x dx + \int_1^2 \frac{1}{2} x dx + \int_2^3 \frac{1}{4} x dx = \frac{3}{2}\,,$$
come seguirebbe immediatamente osservando che $f(x)$ ha un diagramma simmetrico rispetto alla retta di equazione $x = \frac{3}{2}$. Infine, per $x \in (2, 3)$, si ha
$$F(x) = \int_0^1 \frac{1}{4} dx + \int_1^2 \frac{1}{2} dx + \int_2^x \frac{1}{4} dt = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x - 2) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}(x - 2) > \frac{3}{4}\,,$$
con $F(2) = \frac{3}{4}$ e con $F(x) = 1$ per $x \geq 3$; pertanto: $F(x) > \frac{3}{4}$ per $x > 2$.

3. Si ha $f_1(x) = \int_0^{+\infty} 2e^{-x-2y} dy = \cdots = e^{-x}\,,\ x \geq 0$; $f_2(y) = \cdots = 2e^{-2y}\,,\ y \geq 0$. Pertanto X e Y hanno una distribuzione esponenziale di parametri $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, con $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$ per ogni (x, y); quindi X e Y sono stocasticamente indipendenti. Allora $Cov(X, Y) = 0$ e si ha: $\sigma_Z^2 = Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} = \frac{5}{4}$. Fissato $z > 0$, si ha $p = P(Z \leq z) = P(X - Y \leq z) = 1 - P(X - Y > z)$, con
$$P(X - Y > z) = P(Y < X - z) = \int_z^{+\infty} \left(\int_0^{x-z} 2e^{-x} e^{-2y} dy\right) dx =$$
$$= \int_z^{+\infty} e^{-x} \left(\int_0^{x-z} 2e^{-2y} dy\right) dx = \int_z^{+\infty} e^{-x}(1 - e^{-2(x-z)}) dx =$$
$$= \int_z^{+\infty} e^{-x} dx - \frac{1}{3} e^{2z} \int_z^{+\infty} 3e^{-3x} dx = e^{-z} - \frac{1}{3} e^{2z} e^{-3z} = \frac{2}{3}\, e^{-z}.$$
Pertanto: $p = 1 - \frac{2}{3}\, e^{-z}$.

4. Si ha $0 \leq P(X = 0, Y = -1) + P(X = 0, Y = 1) = 2a \leq 1$; pertanto $a \in [0, \frac{1}{2}]$, con $P(X = x, Y = y) = \frac{1-2a}{4}$ per ogni $(x, y) \in \{(-1, -2), (-1, 2), (1, -2), (1, 2)\}$. Inoltre $X \in \{-1, 0, 1\}$, $Y \in \{-2, -1, 1, 2\}$, $XY \in \{-2, 0, 2\}$, con
$$P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1 - 2a}{2}\,,\ P(X = 0) = 2a\,,$$

$$P(Y=-2)=P(Y=2)=\frac{1-2a}{2}\,,\;P(Y=-1)=P(Y=1)=a\,,$$
$$P(XY=-2)=P(XY=2)=\frac{1-2a}{2}\,,\;P(XY=0)=2a\,,$$
Allora: $\mathbb{P}(X)=\mathbb{P}(Y)=\mathbb{P}(XY)=0$; pertanto: $Cov(X,Y)=\rho=0$. Infine, osservando ad esempio che
$$a=P(X=0,Y=1)\;\neq\;P(X=0)P(Y=1)=2a\cdot a=2a^2\,,$$
segue che X e Y non sono stocasticamente indipendenti.

5. Si ha $Z\in\{-3,-1,1,3\}$, con $P(Z=-3)=P(Z=3)=\frac{1}{8}$, $P(Z=-1)=P(Z=1)=\frac{3}{8}$; pertanto
$$\varphi_Z(t)=\mathbb{P}(e^{itZ})=\frac{1}{8}(e^{-3it}+3e^{-it}+3e^{it}+e^{3it})=\frac{3cos(t)+cos(3t)}{4}\,,$$
con $\varphi'_Z(t)=-\frac{3}{4}[sen(t)+sen(3t)]$, $\varphi''_Z(t)=-\frac{3}{4}[cos(t)+3cos(3t)]$. Allora
$$\mathbb{P}(Z)=\frac{\varphi'_Z(0)}{i}=\frac{0}{i}=0\,,\quad\mathbb{P}(Z^2)=\frac{\varphi''_Z(0)}{i^2}=\frac{-3}{-1}=3\,,\quad\sigma^2_Z=\mathbb{P}(Z^2)-[\mathbb{P}(Z)]^2=3\,.$$

In alternativa:
$$\mathbb{P}(Z)=\frac{1}{8}\cdot(-3)+\frac{3}{8}\cdot(-1)+\frac{3}{8}\cdot1+\frac{1}{8}\cdot3=0\,;\;\sigma^2_Z=\mathbb{P}(Z^2)=\frac{1}{8}\cdot9+\frac{3}{8}\cdot1+\frac{3}{8}\cdot1+\frac{1}{8}\cdot9=3\,.$$

6. Si ha $T=3Y\geq0$, con $f_2(y)=2e^{-2y}$, $y\geq0$, con $f_2(y)=0$ altrove; allora, fissato $t\geq0$, segue
$$S_T(t)=P(T>t)=P(3Y>t)=P(Y>\frac{t}{3})=\int_{\frac{t}{3}}^{+\infty}2e^{-2y}dy=e^{-\frac{2}{3}t}\,,$$
con $S_T(t)=1$ per $t<0$. Allora $f_T(t)=-S'_T(t)=\frac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}t}$ per $t\geq0$, con $f_T(t)=0$ per $t<0$ (T ha una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda=\frac{2}{3}$); pertanto
$$h_T(t)=\frac{f_T(t)}{S_T(t)}=\frac{\frac{2}{3}\,e^{-\frac{2}{3}t}}{e^{-\frac{2}{3}t}}=\frac{2}{3}\,,\;t\geq0\,,$$
con $h_T(t)=0$ per $t<0$.

7. Si ha $\Theta\mid\mathbf{x}\sim N_{m_4,\sigma_4}$, con $\frac{1}{\sigma_4^2}=\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{4}{\sigma^2}=\frac{1}{8}+1=\frac{9}{8}$, e quindi $\sigma_4=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, e con $m_4=\frac{\frac{1}{\sigma_0^2}\cdot m_0+\frac{4}{\sigma^2}\cdot\overline{x}}{\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{4}{\sigma^2}}=\frac{1}{\frac{9}{8}}=\frac{8}{9}$. Pertanto, per la distribuzione finale risulta $\Theta\mid\mathbf{x}\sim N_{\frac{8}{9},\frac{2\sqrt{2}}{3}}$. Allora, osservando che $m_4+\sigma_4=\frac{8+6\sqrt{2}}{9}$, $m_4+2\sigma_4=\frac{8+12\sqrt{2}}{9}$, segue
$$p=P(\Theta\leq\frac{8+6\sqrt{2}}{9}\mid\Theta\leq\frac{8+12\sqrt{2}}{9};\mathbf{x})=\frac{P(\Theta\leq\frac{8+6\sqrt{2}}{9}\mid\mathbf{x})}{P(\Theta\leq\frac{8+12\sqrt{2}}{9}\mid\mathbf{x})}=\frac{\Phi_{m_4,\sigma_4}(\frac{8+6\sqrt{2}}{9})}{\Phi_{m_4,\sigma_4}(\frac{8+12\sqrt{2}}{9})}=$$
$$=\frac{\Phi_{m_4,\sigma_4}(m_4+\sigma_4)}{\Phi_{m_4,\sigma_4}(m_4+2\sigma_4)}=\frac{\Phi(1)}{\Phi(2)}\simeq\frac{0.8413}{0.9772}\simeq0.8609\,.$$