Probabilità e Statistica (10/11/2012)

(Ing. Civ. - Trasp. - Clin. - El. - Amb. Terr., Roma; esame da 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)
(esame da 5-6 crediti: risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Sia Z il risultato aleatorio del lancio di un dado, con $P(Z = k) = \frac{1}{6}, k = 1, \dots, 6$. Definiti gli eventi $A = (Z \in \{2, 3\})$, $B = (Z \in \{3, 4\})$, $C = (Z \in \{4, 5\})$, determinare i costituenti relativi ad A, B, C. Inoltre, calcolare la previsione m e lo scarto quadratico medio σ del numero aleatorio $X = |A| - |B| + |C|$.

   costituenti : $\qquad$ $m =$ $\qquad$ $\sigma =$

2. Da un'urna di composizione incognita, contenente 2 palline, si effettuano estrazioni con restituzione. Definiti gli eventi $H_r =$ *"nell'urna ci sono r palline bianche"*, $r = 0, 1, 2$, $E_i =$ *"l'i-ma pallina estratta è bianca"*, $i = 1, 2, \dots, n, \dots$, si supponga $P(H_1) = 7p, P(H_2) = p$, $0 < p < \frac{1}{8}$. Stabilire per quali valori di n si ha $P(H_1|E_1 \cdots E_n) < P(H_2|E_1 \cdots E_n)$; inoltre, posto $\alpha = P(E_{n+1}|E_1 \cdots E_n)$, stabilire per quali valori di n risulta $\alpha > \frac{9}{10}$.

   $n \in$ $\qquad$ $n \in$

3. Due veicoli partono insieme da uno stesso punto, con velocità aleatorie (in km/h) rispettive X e $Y = \frac{X}{2}$. Supposto che X abbia distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1$ e indicando con Z la distanza aleatoria tra i due veicoli dopo un'ora, calcolare: la previsione m di Z, la probabilità p dell'evento condizionato $(Z > 2|Z > 1)$ e il coefficiente di correlazione ρ di X, Y.

   $m =$ $\qquad$ $p =$ $\qquad$ $\rho =$

4. Un rettangolo R ha dimensioni aleatorie X, Y. Assumendo per (X, Y) una distribuzione uniforme sul quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$, calcolare le previsioni μ ed m dell'area A e del perimetro Z di R. Inoltre, calcolare $p = P(Z \leq 1)$.

   $\mu =$ $\qquad$ $m =$ $\qquad$ $p =$

5. Siano $X_1, \dots, X_n$ dei numeri aleatori indipendenti e con distribuzione uguale a quella di X nell'esercizio 1. Calcolare le funzioni caratteristiche di $Y = X_1 + \cdots + X_n$ e $Z = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$.

   $\varphi_Y(t) =$ $\qquad$ $\varphi_Z(t) =$

6. Un sistema S è formato da 3 dispositivi d_1, d_2, d_3, funzionanti in contemporanea, con durate aleatorie X_1, X_2, X_3 indipendenti e con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1$; d_1 e d_2, in parallelo, formano un modulo M (di durata aleatoria Y) disposto in serie con d_3. Calcolare la previsione μ e la funzione di rischio $h_T(t)$ della durata aleatoria T di S.

   $\mu =$ $\qquad$ $h_T(t) =$

7. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio Θ è normale con parametri $m_0 = \sigma_0 = 1$. Le componenti di un campione casuale $(X_1, \dots, X_{15})$, subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione normale con valor medio θ e scarto standard $\sigma = 1$. Supposto di aver osservato un campione casuale $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{15})$, con $x_1 + \cdots + x_{15} = 15$, calcolare la probabilità p dell'evento condizionato $(\frac{1}{2} \leq \Theta \leq \frac{3}{4} \mid \mathbf{x})$. Supposto inoltre che per il numero aleatorio $X = a\,\Theta + b$, con $a > 0$, valga $X \sim N_{0,1}$, calcolare a, b.

   $p =$ $\qquad$ $a =$ $\qquad$ $b =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civ. - Trasp. - Clin. - El. - Amb. Terr., Roma)
Soluzioni della prova scritta del 10/11/2012.

1. I costituenti relativi ad A, B, C sono

$$AB^cC^c = (Z = 2), ABC^c = (Z = 3), A^cBC = (Z = 4), A^cB^cC = (Z = 5), A^cB^cC^c = (Z \in \{1, 6\}).$$

I valori possibili di X sono 0 e 1, con

$$P(X = 0) = P(ABC^c \vee A^cBC \vee A^cB^cC^c) = P(Z \in \{1, 3, 4, 6\}) = \frac{2}{3}\,,\; P(X = 1) = \frac{1}{3}\,.$$

Pertanto $X = |Z \in \{2, 5\}|$; allora: $m = P(Z \in \{2, 5\}) = \frac{1}{3}$, $\sigma = \sqrt{pq} = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

2. Si ha: $P(E_1 \cdots E_n|H_0) = 0\,,\; P(E_1 \cdots E_n|H_1) = \frac{1}{2^n}\,,\; P(E_1 \cdots E_n|H_2) = 1$; allora

$$P(H_1|E_1 \cdots E_n) = \frac{P(E_1 \cdots E_n|H_1)P(H_1)}{\sum_r P(E_1 \cdots E_n|H_r)P(H_r)} = \frac{\frac{7p}{2^n}}{\frac{7p}{2^n} + p} = \frac{7}{7 + 2^n}\,;$$

inoltre: $P(H_2|E_1 \cdots E_n) = 1 - P(H_1|E_1 \cdots E_n) = \frac{2^n}{7+2^n}$. Pertanto

$$P(H_1|E_1 \cdots E_n) < P(H_2|E_1 \cdots E_n) \iff 7 < 2^n \iff n = 3, 4, \ldots\,.$$

Infine: $\alpha = P(E_{n+1}|E_1 \cdots E_n) = \frac{P(E_1 \cdots E_n E_{n+1})}{P(E_1 \cdots E_n)} = \frac{\frac{7p}{2^{n+1}} + p}{\frac{7p}{2^n} + p} = \frac{7+2^{n+1}}{14+2^{n+1}} > \frac{9}{10}$, per $n \geq 5$.

3. La distanza aleatoria (in km) dopo un tempo t tra i due veicoli è pari a $Xt - Yt = (X - \frac{X}{2})t = \frac{1}{2}Xt$. Pertanto $Z = \frac{X}{2}$ e quindi $m = \mathbb{P}(Z) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$.
Inoltre, ricordando che $P(X > x + y|X > y) = P(X > x)$ per ogni $x > 0, y > 0$, segue

$$p = P(Z > 2|Z > 1) = \frac{P(Z > 2, Z > 1)}{P(Z > 1)} = \frac{P(Z > 2)}{P(Z > 1)} = \frac{P(X > 4)}{P(X > 2)} = P(X > 2) = e^{-2}\,.$$

Infine, ricordando che per $Y = aX + b$ si ha $\rho = \frac{a}{|a|} = \pm 1$, essendo $Y = \frac{1}{2}X$ segue $\rho = 1$.

4. Si ha $f(x, y) = 1$ per $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Allora

$$\mu = \mathbb{P}(XY) = \int_0^1 \int_0^1 xyf(x, y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 xydy = \int_0^1 x \left[\frac{y}{2}\right]_0^1 dx = \int_0^1 \frac{x}{2}dx = \frac{1}{4}\,;$$

$$m = \mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}[2(X+Y)] = \int_0^1 \int_0^1 2(x+y)f(x, y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 2(x+y)dy = \cdots = 2\,.$$

Inoltre

$$p = P(Z \leq 1) = P\left(X + Y \leq \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\frac{1}{2}-x} dxdy = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - x\right) dx = \cdots = \frac{1}{8}\,.$$

5. Si ha $\varphi_{X_h}(t) = \varphi_X(t) = \frac{1}{3}e^{it} + \frac{2}{3}$, $h = 1, \ldots, n$; pertanto

$$\varphi_Y(t) = \mathbb{P}(e^{itY}) = \mathbb{P}(e^{it(X_1+\cdots+X_n)}) = \mathbb{P}(e^{itX_1})\cdots\mathbb{P}(e^{itX_n}) = \left(\frac{1}{3}e^{it} + \frac{2}{3}\right)^n .$$

Inoltre

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{P}(e^{itZ}) = \mathbb{P}(e^{it\frac{Y}{n}}) = \mathbb{P}(e^{i\frac{t}{n}Y}) = \varphi_Y\left(\frac{t}{n}\right) = \left(\frac{1}{3}e^{i\frac{t}{n}} + \frac{2}{3}\right)^n .$$

Nota: $Y \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $Z \in \{0, \frac{1}{n}, \ldots, 1\}$, *con*

$$P(Y = h) = P\left(Z = \frac{h}{n}\right) = \binom{n}{h}\left(\frac{1}{3}\right)^h\left(\frac{2}{3}\right)^{n-h}, \ h = 0, 1, \ldots, n .$$

6. Si ha $Y = max\ \{X_1, X_2\}$; quindi $(Y \le y) = (X_1 \le y, X_2 \le y)$. Allora, per ogni fissato $y > 0$, si ha

$$P(Y \le y) = P(X_1 \le y, X_2 \le y) = P(X_1 \le y)P(X_2 \le y) = (1-e^{-y})(1-e^{-y}) = (1-e^{-y})^2 .$$

Inoltre $T = min\ \{Y, X_3\}$; quindi $(T > t) = (Y > t, X_3 > t)$. Allora, osservando che $P(Y > t) = 1 - P(Y \le t) = 1 - (1 - e^{-t})^2 = 2e^{-t} - e^{-2t}$, per ogni fissato $t > 0$ si ha

$$S_T(t) = P(T > t) = P(Y > t, X_3 > t) = P(Y > t)P(X_3 > t) = (2e^{-t}-e^{-2t})e^{-t} = 2e^{-2t}-e^{-3t},$$

$$f_T(t) = -S'_T(t) = 4e^{-2t} - 3e^{-3t}, \quad \mu = \int_0^{+\infty} t(4e^{-2t} - 3e^{-3t})dt = \cdots = 2\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} .$$

Infine: $h_T(t) = \frac{f_T(t)}{S_T(t)} = \frac{4e^{-2t}-3e^{-3t}}{2e^{-2t}-e^{-3t}} = \frac{4e^t-3}{2e^t-1}$.

7. Si ha $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{m_{15},\sigma_{15}}$, con $m_{15} = m_0 = 1$ in quanto $\overline{x} = m_0 = 1$. Inoltre $\frac{1}{\sigma_{15}^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{15}{\sigma^2} = 16$ e quindi $\sigma_{15} = \frac{1}{4}$; pertanto $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{1,\frac{1}{4}}$. Allora

$$P\left(\frac{1}{2} \le \Theta \le \frac{3}{4} \mid \mathbf{x}\right) = \Phi_{1,\frac{1}{4}}\left(\frac{3}{4}\right) - \Phi_{1,\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}\right) = \Phi\left(\frac{\frac{3}{4}-1}{\frac{1}{4}}\right) - \Phi\left(\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{4}}\right) =$$

$$= \Phi(-1) - \Phi(-2) = 1 - \Phi(1) - [1 - \Phi(2)] = \Phi(2) - \Phi(1) \simeq 0.9772 - 0.8413 = 0.1359 .$$

Inoltre $X = a\,\Theta + b \sim N_{a+b,\frac{a}{4}} = N_{0,1}$ se e solo se $a + b = 0$, $\frac{a}{4} = 1$, cioè $a = 4, b = -4$.
In altri termini: $X = 4(\Theta - 1) = \frac{\Theta - m_{15}}{\sigma_{15}}$.