Probabilità e Statistica (11/02/2013)

(Ing. Civ. - Trasp. - Amb. Terr. - Elettr., Roma; esame da 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)
(esame da 5-6 crediti: risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Un sistema S è costituito da un modulo M, formato da due dispositivi D_1, D_2 in parallelo, in serie con un dispositivo D_3. I tre dispositivi entrano in funzione in istanti aleatori X, Y, Z indipendenti e con distribuzione uniforme nell'intervallo $[0, 2]$. Fissato $t \in (0, 2)$, siano definiti gli eventi $A = (X \leq t)$, $B = (Y \leq t)$, $C = (Z \leq t)$. Calcolare: (i) la probabilità p dell'evento condizionato $ABC \,|\, (A \vee B \vee C)$; (ii) la probabilità α dell'evento $E =$ "il sistema è in funzione nell'istante t".

   $p =$ $\qquad\qquad$ $\alpha =$

2. Le densità marginali di un vettore aleatorio (X, Y) sono: $f_1(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{18}}$, $x \in I\!R$, $f_2(y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-5)^2}{8}}$, $y \in I\!R$. Inoltre, il coefficiente di correlazione di X, Y è $\rho = -\frac{1}{2}$. Posto $U = -X + 2Y$, $V = 2X - Y$, calcolare $Var(U + V)$ e $Cov(U + V, X - Y)$.

   $Var(U{+}V) =$ $\qquad\qquad$ $Cov(U{+}V, X{-}Y) =$

3. Dato un punto aleatorio (X, Y) scelto a caso nel quadrato $[0, 2] \times [0, 2]$, calcolare la probabilità condizionata p che (X, Y) appartenga al quadrato $Q = [0, 1] \times [0, 1]$, supposto che appartenga al triangolo T di vertici i punti $(0, 0), (2, 0), (0, 2)$. Inoltre, calcolare lo scarto standard σ del numero aleatorio $Z = \frac{X+Y}{2}$.

   $p =$ $\qquad\qquad$ $\sigma =$

4. Sia $X \sim N_{m,\sigma}$. Posto $a = P(X > m - k\sigma \,|\, X \leq m + k\sigma)$, $b = P(X > m - \sigma \,|\, X \leq m + \sigma)$, determinare i valori della costante positiva k tali che $a > b$.

   k ?

5. Le funzioni caratteristiche di due numeri aleatori X, Y stocasticamente indipendenti sono rispettivamente $\varphi_X(t) = (\frac{2}{3}e^{it} + \frac{1}{3})^2$, $\varphi_Y(t) = (\frac{2}{3}e^{it} + \frac{1}{3})^4$. Calcolare la previsione m e lo scarto quadratico medio σ di $Z = X + Y$ e la probabilità $p_h = P(Z = h)$, per un fissato $h \in \{0, 1, \ldots, 6\}$.

   $m =$ $\qquad\qquad$ $\sigma =$ $\qquad\qquad$ $p_h =$

6. La funzione di rischio di un numero aleatorio X non negativo è $h(x) = 3x^2$ per $x \geq 0$, con $h(x) = 0$ altrove. Calcolare la densità di probabilità $f(x)$, per $x \geq 0$, e le probabilità condizionate $p = P(X > 2 \,|\, X > 1)$ e $\alpha = P(X \leq 1 \,|\, X \leq 2)$.

   $f(x) =$ $\qquad\qquad$ $p =$ $\qquad\qquad$ $\alpha =$

7. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio Θ è normale con parametri $m_0 = 0$, $\sigma_0 = 4$. Le componenti di un campione casuale (X_1, X_2, X_3), subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione normale con valor medio θ e scarto standard $\sigma = 2$. Supposto di aver osservato un campione casuale $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, con $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, stabilire per quale valore θ_0 risulta $P(\Theta > \theta_0 \mid \mathbf{x}) = \Phi(-2)$.

   $\theta_0 =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civ. - Trasp. - Amb. Terr. - Elettr., Roma)

Soluzioni della prova scritta del 11/02/2013.

1. Si ha $f_X(t) = f_Y(t) = f_Z(t) = \frac{1}{2}$ per $t \in [0,2]$, con $f_X(t) = f_Y(t) = f_Z(t) = 0$ altrove; quindi $P(A) = P(B) = P(C) = \int_0^t \frac{1}{2}dt = \frac{t}{2}$. Allora, osservando che A, B, C sono stocasticamente indipendenti e che $ABC \subseteq A \vee B \vee C$, segue
$$p = P[ABC \,|\, (A \vee B \vee C)] = \frac{P(ABC)}{P(A \vee B \vee C)} = \frac{\frac{t^3}{8}}{1-(1-\frac{t}{2})^3} = \frac{t^2}{12-6t+t^2}\,.$$
Inoltre $E = (A \vee B) \wedge C = AC \vee BC$; allora
$$\alpha = P(E) = P(AC \vee BC) = P(AC) + P(BC) - P(ABC) = \frac{t^2}{4} + \frac{t^2}{4} - \frac{t^3}{8} = \frac{4t^2 - t^3}{8}\,.$$

2. X ed Y hanno una distribuzione normale di parametri $m_1 = 1$, $\sigma_1 = 3$, $m_2 = 5$, $\sigma_2 = 2$. Inoltre $U + V = X + Y$, $Cov(X,Y) = \rho\sigma_1\sigma_2 = -\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = -3$. Allora
$$Var(U+V) = Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y) = 7\,.$$
Inoltre: $Cov(U+V, X-Y) = Cov(X+Y, X-Y) = \cdots = Cov(X,X) - Cov(Y,Y) = = Var(X) - Var(Y) = 5$.

3. (X,Y) ha una distribuzione uniforme; quindi $f(x,y) = \frac{1}{4}$ per $(x,y) \in [0,2] \times [0,2]$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Allora, osservando che l'equazione della retta passante per i punti $(2,0), (0,2)$ è $x + y = 2$ e che Q è contenuto in T, segue
$$p = \frac{P(0 \le X \le 1, 0 \le Y \le 1)}{P(X+Y \le 2)} = \frac{\int\int_Q f(x,y)dxdy}{\int\int_T f(x,y)dxdy} = \frac{\frac{1}{4}\int\int_Q dxdy}{\frac{1}{4}\int\int_T dxdy} = \frac{\mu(Q)}{\mu(T)} = \frac{1}{2}\,.$$
Inoltre, come si può verificare, X e Y hanno una distribuzione uniforme su $[0,2]$ e sono stocasticamente indipendenti. Pertanto: $Var(X) = Var(Y) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{3}$, $Cov(X,Y) = 0$, da cui segue: $\sigma = \sqrt{\frac{Var(X)+Var(Y)}{4}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

4. Ricordando che $\Phi_{m,\sigma}(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$, si ha: $a = P(X > m - k\sigma \,|\, X \le m + k\sigma) = = \frac{P(X>m-k\sigma, X \le m+k\sigma)}{P(X \le m+k\sigma)} = \frac{P(m-k\sigma \le X \le m+k\sigma)}{P(X \le m+k\sigma)} = \frac{\Phi_{m,\sigma}(m+k\sigma)-\Phi_{m,\sigma}(m-k\sigma)}{\Phi_{m,\sigma}(m+k\sigma)} = \frac{2\Phi(k)-1}{\Phi(k)}$;
$$b = \frac{P(X > m-\sigma, X \le m+\sigma)}{P(X \le m+\sigma)} = \frac{P(m-\sigma \le X \le m+\sigma)}{P(X \le m+\sigma)} = \frac{2\Phi(1)-1}{\Phi(1)}\,.$$
Allora, ricordando che Φ è una funzione crescente, segue
$$a > b \iff \frac{2\Phi(k)-1}{\Phi(k)} > \frac{2\Phi(1)-1}{\Phi(1)} \iff \frac{1}{\Phi(1)} > \frac{1}{\Phi(k)} \iff \Phi(k) > \Phi(1) \iff k > 1\,.$$

5. Si ha $\varphi_Z(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = (\frac{2}{3}e^{it} + \frac{1}{3})^6$ e ricordando che per una distribuzione binomiale $B(n,p)$ la funzione caratteristica è $(pe^{it} + q)^n$ segue $Z \sim B(6, \frac{2}{3})$. Allora

$$m = np = 4\,, \qquad \sigma = \sqrt{npq} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,, \qquad p_h = \binom{6}{h}\left(\frac{2}{3}\right)^h \left(\frac{1}{3}\right)^{6-h}\,.$$

6. Osservando che $h(x) = 0$ per $x < 0$, si ha $S(x) = e^{-\int_0^x h(t)dt} = e^{-\int_0^x 3t^2 dt} = e^{-x^3}$; allora $f(x) = h(x)S(x) = 3x^2e^{-x^3}$ per $x \geq 0$, con $f(x) = 0$ altrove. Inoltre

$$p = P(X > 2\,|\,X > 1) = \frac{P(X > 2, X > 1)}{P(X > 1)} = \frac{P(X > 2)}{P(X > 1)} = \frac{S(2)}{S(1)} = \frac{e^{-8}}{e^{-1}} = e^{-7}\,;$$

$$\alpha = P(X \leq 1\,|\,X \leq 2) = \frac{P(X \leq 1, X \leq 2)}{P(X \leq 2)} = \frac{P(X \leq 1)}{P(X \leq 2)} = \frac{1 - S(1)}{1 - S(2)} = \frac{1 - e^{-1}}{1 - e^{-8}} = \frac{e^8 - e^7}{e^8 - 1}\,.$$

7. Si ha $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{m_3,\sigma_3}$, con $m_3 = 0$ in quanto $\overline{x} = m_0 = 0$. Inoltre

$$\frac{1}{\sigma_3^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{3}{\sigma^2} = \frac{1}{16} + \frac{3}{4} = \frac{13}{16}\,,$$

e quindi $\sigma_3 = \frac{4}{\sqrt{13}}$. Pertanto $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{0,\frac{4}{\sqrt{13}}}$. Allora

$$P(\Theta > \theta_0 \mid \mathbf{x}) = 1 - \Phi_{0,\frac{4}{\sqrt{13}}}(\theta_0) = 1 - \Phi\left(\frac{\theta_0 - 0}{\frac{4}{\sqrt{13}}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{13}}{4}\,\theta_0\right) =$$

$$= \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) \iff \Phi\left(\frac{\sqrt{13}}{4}\,\theta_0\right) = \Phi(2) \iff \frac{\sqrt{13}}{4}\,\theta_0 = 2 \iff \theta_0 = \frac{8}{\sqrt{13}} = 2\sigma_3\,.$$