Probabilità e Statistica (12/04/2013)

(Ing. Civ. - Trasp. - Amb. Terr. - Elettr., Roma; esame da 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)
(esame da 5-6 crediti: risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Da un'urna U, contenente 2 palline bianche e 2 nere, Tizio e Caio effettuano, rispettivamente, 2 e 3 estrazioni con restituzione. Definiti gli eventi A_i = *"l'i-ma pallina estratta da Tizio è bianca"*, $i = 1, 2$, B_j = *"la j-ma pallina estratta da Caio è bianca"*, $j = 1, 2, 3$, sia X (risp., Y) il numero aleatorio di palline bianche estratte da Tizio (risp., Caio). Calcolare: (i) la probabilità p dell'evento condizionato $(X = 1|X + Y = 1)$; (ii) la covarianza della coppia $(X, X - Y)$.

   $p =$ $\qquad\qquad\qquad$ $Cov(X, X - Y) =$

2. Da un gruppo di 8 studenti, dei quali 2 sanno risolvere un certo quesito, ne vengono estratti a caso 4. Successivamente, il quesito viene sottoposto ad uno dei 4 studenti (scelto a caso). Definiti gli eventi H_r = *"fra i 4 studenti estratti a caso ve ne sono r che sanno risolvere il quesito"*, $r = 0, 1, 2$; E = *"lo studente scelto a caso non sa risolvere il quesito"*, calcolare $\alpha = P(E)$ e la probabilità condizionata p che nessuno dei 4 studenti estratti sappia risolvere il quesito, supposto vero E.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad\qquad$ $p =$

3. Un vettore aleatorio continuo (X, Y) ha una distribuzione normale bidimensionale di parametri: m_1, m_2, σ_1, σ_2, ρ. Assumendo che X e Y siano incorrelati, calcolare la probabilità p dell'evento $(m_1 - \sigma_1 \leq X \leq m_1 + 2\sigma_1,\ m_2 - 2\sigma_2 \leq Y \leq m_2 + \sigma_2)$.

   $p =$

4. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = e^{-ax-y}$, per $(x, y) \in \mathcal{C} = \{(x, y) : x \geq 0,\ 0 \leq y \leq x\}$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante (positiva) a e la probabilità p dell'evento $(0 \leq X - Y \leq 1)$.

   $a =$ $\qquad\qquad\qquad$ $p =$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione di sopravvivenza e la funzione di rischio di $Z = X - Y$.

   $S_Z(z) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $h_Z(z) =$

6. Con riferimento all'esercizio 1, calcolare la funzione caratteristica del numero aleatorio $U = X + Y$ e la probabilità $p_h = P(U = h)$, $h \in \{0, 1, \dots, 5\}$.

   $\varphi_U(t) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $p_h =$

7. Dati tre eventi scambiabili E_1, E_2, E_3, con $P(E_1) = \frac{1}{2}, P(E_1E_2) = \frac{1}{5}, P(E_1E_2E_3) = \frac{1}{20}$, calcolare: (i) $\alpha = P(E_1 \vee E_3 \,|\, E_1 \vee E_2 \vee E_3)$; (ii) $\beta = P(E_1^c \,|\, E_2^cE_3^c)$.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\beta =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civ. - Trasp. - Amb. Terr. - Elettr., Roma)
Soluzioni della prova scritta del 12/04/2013.

1. Gli eventi A_1, A_2, B_1, B_2, B_3 sono equiprobabili e indipendenti, con $P(A_i) = P(B_j) = \frac{1}{2}$. Allora: $X = |A_1| + |A_2| \sim B(2, \frac{1}{2})$, $Y = |B_1| + |B_2| + |B_3| \sim B(3, \frac{1}{2})$, con X e Y stocasticamente indipendenti; pertanto:

$$p = P(X = 1|X+Y = 1) = \frac{P(X = 1, X + Y = 1)}{P(X + Y = 1)} = \frac{P(X = 1, Y = 0)}{P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 0)} =$$

$$= \frac{P(X = 1)P(Y = 0)}{P(X = 0)P(Y = 1) + P(X = 1)P(Y = 0)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}} = \frac{2}{5}\,.$$

$$Cov(X, X - Y) = Cov(X, X) - Cov(X, Y) = Var(X) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

2. Si ha: $P(H_r) = \frac{\binom{2}{r}\binom{6}{4-r}}{\binom{8}{4}}$, $\;r = 0, 1, 2$; quindi

$$P(H_0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{6}{4}}{\binom{8}{4}} = \frac{3}{14}\,, \quad P(H_1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{6}{3}}{\binom{8}{4}} = \frac{4}{7}\,, \quad P(H_2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{6}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{3}{14}\,,$$

con $P(E|H_0) = 1\,,\;\; P(E|H_1) = \frac{3}{4}\,,\;\; P(E|H_2) = \frac{1}{2}$. Allora

$$\alpha = P(E) = P(E|H_0)P(H_0)+P(E|H_1)P(H_1)+P(E|H_2)P(H_2) = 1\cdot\frac{3}{14}+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{14} = \frac{3}{4}\,.$$

Inoltre: $p = P(H_0|E) = \frac{P(E|H_0)P(H_0)}{P(E)} = \frac{1\cdot\frac{3}{14}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{7}\,.$

3. Ricordando che ρ è il coefficiente di correlazione ed essendo X ed Y incorrelati segue $\rho = 0$; inoltre, dalle proprietà della distribuzione normale bidimensionale segue che, essendo incorrelati, X ed Y sono anche stocasticamente indipendenti. Pertanto

$$p = P(m_1 - \sigma_1 \le X \le m_1 + 2\sigma_1,\, m_2 - 2\sigma_2 \le Y \le m_2 + \sigma_2) =$$

$$= P(m_1 - \sigma_1 \le X \le m_1 + 2\sigma_1)P(m_2 - 2\sigma_2 \le Y \le m_2 + \sigma_2) =$$

$$= P\left(-1 \le \frac{X - m_1}{\sigma_1} \le 2\right) P\left(-2 \le \frac{Y - m_2}{\sigma_2} \le 1\right) = [\Phi(2) - \Phi(-1)][\Phi(1) - \Phi(-2)] =$$

$$= [\Phi(2) + \Phi(1) - 1]^2 \simeq 0.8185^2 \simeq 0.6699\,.$$

4. Dalla condizione $\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)dxdy = 1$, segue: $\int_0^{+\infty} dx \int_0^x e^{-ax-y}dy = \int_0^{+\infty} e^{-ax}(1-e^{-x})dx =$

$$= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} ae^{-ax}dx - \frac{1}{a+1}\int_0^{+\infty}(a + 1)e^{-(a+1)x})dx = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} = \frac{1}{a(a+1)} = 1\,;$$

cioè: $a(a + 1) = 1$, $a > 0$, ovvero: $a^2 + a - 1 = 0$, $a > 0$; pertanto: $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
Inoltre, indicando con $\mathcal{D}$ la striscia contenuta nel primo quadrante compresa tra le rette di equazione $y = x$, $y = x - 1$, si ha

$$p = P(0 \le X - Y \le 1) = P[(X, Y) \in \mathcal{D}] = \int\int_{\mathcal{D}} f(x, y)dxdy = \int_0^{+\infty} dy \int_y^{y+1} e^{-ax-y}dx =$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} e^{-y}(e^{-ay}-e^{-a(y+1)})dy = \frac{1 - e^{-a}}{a(a+1)}\int_0^{+\infty}(a+1)e^{-(a+1)y}dy = \frac{1 - e^{-a}}{a(a+1)} = 1-e^{-\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\,.$$

5. Essendo $(X, Y) \in \mathcal{C}$, segue $Z = X - Y \in [0, +\infty)$; inoltre, fissato $z > 0$ e ricordando che $a(a+1) = 1$, si ha

$$S_Z(z) = P(Z > z) = P(Y < X - z) = \int_z^{+\infty} dx \int_0^{x-z} e^{-ax-y} dy = \cdots =$$

$$= \frac{1}{a} \int_z^{+\infty} a e^{-ax} dx - \frac{e^z}{a+1} \int_z^{+\infty} (a+1) e^{-(a+1)x} dx = \frac{e^{-az}}{a} - \frac{e^{-az}}{a+1} = e^{-az}\,,\ (a = \frac{\sqrt{5}-1}{2})\,,$$

con $f_Z(z) = -S'_Z(z) = a e^{-az}$ (distribuzione esponenziale di parametro $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$).
Pertanto

$$h_Z(z) = \frac{f_Z(z)}{S_Z(z)} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,, \quad z > 0\,.$$

6. Si ha

$$P(X=0) = P(X=2) = \frac{1}{4},\ P(X=1) = \frac{1}{2}\,,\ P(Y=0) = P(Y=3) = \frac{1}{8},\ P(Y=1) = P(Y=2) = \frac{3}{8}\,;$$

pertanto

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{4}e^{2it} = \left(\frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}\right)^2\,;\ \varphi_Y(t) = \cdots = \left(\frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}\right)^3\,.$$

Allora:

$$\varphi_U(t) = \mathbb{P}(e^{itU}) = \mathbb{P}(e^{it(X+Y)}) = \mathbb{P}(e^{itX})\mathbb{P}(e^{itY}) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = \left(\frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}\right)^5\,;$$

quindi: $U \sim B(5, \frac{1}{2})$, con $p_h = \frac{\binom{5}{h}}{2^5}$, $h = 0, 1, \ldots, 5$.

7. Si ha: $P(E_i) = \frac{1}{2}$, $P(E_i E_j) = \frac{1}{5}$; quindi: $P(E_1 \vee E_3) = 2P(E_1) - P(E_1 E_2) = 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$, $P(E_1 \vee E_2 \vee E_3) = 3P(E_1) - 3P(E_1 E_2) + P(E_1 E_2 E_3) = 3 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$. Pertanto

$$\alpha = P(E_1 \vee E_3 \,|\, E_1 \vee E_2 \vee E_3) = \frac{P(E_1 \vee E_3)}{P(E_1 \vee E_2 \vee E_3)} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{19}{20}} = \frac{16}{19}\,;$$

$$\beta = P(E_1^c \,|\, E_2^c E_3^c) = \frac{P(E_1^c E_2^c E_3^c)}{P(E_2^c E_3^c)} = \frac{1 - P(E_1 \vee E_2 \vee E_3)}{1 - P(E_2 \vee E_3)} = \frac{1 - \frac{19}{20}}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}\,.$$