Probabilità e Statistica (6/6/2013)

(Ing. Civ. - Trasp. - Amb. Terr. - Elettr., Roma; esame da 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)
(esame da 5-6 crediti: risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Tizio e Caio lanciano ognuno per 3 volte un dado. Siano definiti gli eventi $A_i =$ *"nell'i-mo lancio Tizio ottiene successo, cioè un risultato minore di 5"*, $i = 1, 2, 3$; $B_j =$ *"nel j-mo lancio Caio ottiene successo, cioè un risultato minore di 3"*, $j = 1, 2, 3$; $H =$ *"Tizio ottiene 3 successi o 3 insuccessi"*; $K =$ *"Caio ottiene 3 successi o 3 insuccessi"*. Calcolare $P(H \vee K)$ e stabilire se HK e $H \vee K$ sono correlati.

   $P(H \vee K) =$ *Correlazione* ?

2. Un lotto L di 4 pezzi è stato prodotto da un'apparecchiatura A (ipotesi H), oppure B (ipotesi H^c). Ogni pezzo (indipendentemente dagli altri) è difettoso con probabilità $\frac{1}{5}$ se prodotto da A, con probabilità $\frac{1}{4}$ se prodotto da B. Supposto $P(H) = 3P(H^c)$, sia X il numero aleatorio di pezzi difettosi nel lotto. Calcolare la probabilità $p = P(X \geq 1)$. Inoltre, supposto che almeno un pezzo del lotto sia non difettoso (evento E), calcolare la probabilità α che il lotto sia stato prodotto da A.

   $p =$ $\alpha =$

3. Il codominio di un vettore aleatorio discreto (X, Y) è $\{(-1, -1), (0, -1), (0, 1), (1, 1)\}$, con $p(-1, -1) = p(1, 1) = a > 0, p(0, -1) = p(0, 1)$, dove $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$. Calcolare $Cov(X, Y)$ e stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti; inoltre, calcolare per quale valore di a i numeri aleatori $X + Y$ e $X - Y$ sono incorrelati.

   $Cov(X, Y) =$ *Indip. St.* ? $a =$

4. Due veicoli in movimento l'uno verso l'altro su un percorso rettilineo, con velocità aleatorie X e Y, nell'istante zero si trovano in due punti A e B. La densità congiunta di (X, Y) è $f(x, y) = ae^{-\frac{x}{2}-2y}$, per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante a e la probabilità p che il punto d'incontro C dei due veicoli sia più vicino ad A che a B.

   $a =$ $p =$

5. Dato un numero aleatorio X, con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1$, e posto $Y = 5X$, calcolare la funzione di rischio di Y e la probabilità $p = P(Y > 3|Y > 2)$.

   $h_Y(y) =$ $p =$

6. La funzione caratteristica di un numero aleatorio X è $\varphi_X(t) = e^{-it-t^2}$. Posto $Y = \frac{X+1}{\sqrt{2}}$, calcolare la funzione caratteristica e la previsione di Y.

   $\varphi_Y(t) =$ $\mathbb{P}(Y) =$

7. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio Θ è $\beta(\theta) = \frac{1}{2}\theta^2 e^{-\theta}$, per $\theta \geq 0$, con $\beta(\theta) = 0$ altrove. Le componenti di un campione casuale (X_1, X_2, X_3), subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione esponenziale di parametro θ. Indicando con $\mathbf{x}$ un campione osservato (x_1, x_2, x_3), con $x_1 + x_2 + x_3 = t$, calcolare la previsione m_3 e lo scarto quadratico medio σ_3 di $\Theta|\mathbf{x}$.

   $m_3 =$ $\sigma_3 =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civ. - Trasp. - Amb. Terr. - Elettr., Roma)
Soluzioni della prova scritta del 6/6/2013.

1. Si ha: $P(A_i) = \frac{2}{3}, i = 1,2,3; P(B_j) = \frac{1}{3}, j = 1,2,3$; allora

$$P(H) = P(A_1A_2A_3)+P(A_1^cA_2^cA_3^c) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)+P(A_1^c)P(A_2^c)P(A_3^c) = \left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3}\,;$$

$$P(K) = P(B_1B_2B_3)+P(B_1^cB_2^cB_3^c) = P(B_1)P(B_2)P(B_3)+P(B_1^c)P(B_2^c)P(B_3^c) = \left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{1}{3}\,;$$

$$P(H \vee K) = P(H) + P(K) - P(HK) = P(H) + P(K) - P(H)P(K) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}\,.$$

Inoltre

$$P(HK|H \vee K) = \frac{P(HK)}{P(H \vee K)} = \frac{P(H)P(K)}{P(H) + P(K) - P(H)P(K)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{1}{5} \;>\; \frac{1}{9} = P(HK)\,;$$

pertanto HK e $H \vee K$ sono correlati positivamente.

2. Si ha $P(H) = \frac{3}{4}$, $P(H^c) = \frac{1}{4}$, $p = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$, con

$$P(X = 0) = P(X = 0|H)P(H) + P(X = 0|H^c)P(H^c) =$$

$$= \binom{4}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\frac{4}{5}\right)^{4-0}\cdot\frac{3}{4} + \binom{4}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{4-0}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^4 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4 \simeq 0.3863\,;$$

pertanto: $p = P(X \geq 1) = 1 - \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^4 - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4 \simeq 0.6137$.
Inoltre $E = (X \leq 3)$, $E^c = (X = 4)$, $P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - P(X = 4)$, con

$$P(X = 4) = P(X = 4|H)P(H) + P(X = 4|H^c)P(H^c) = \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^4 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4 \simeq 0.0002\,;$$

pertanto

$$P(H|E) = \frac{P(EH)}{P(E)} = \frac{P(H) - P(E^cH)}{P(E)} = \frac{P(H)[1 - P(E^c|H)]}{P(E)} = \frac{P(H)[1 - P(X = 4|H)]}{1 - P(X = 4)} =$$

$$= \frac{\frac{3}{4}\left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^4\right]}{1 - \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^4 - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4} = \frac{3(5^4 - 1)}{4\cdot 5^4 - 3 - \left(\frac{5}{4}\right)^4} \;\simeq\; \frac{1872}{2500 - 3 - 2.4414} \;\simeq\; 0.7504 > P(H)\,.$$

3. Si ha $a \leq \frac{1}{2}$, $X \in \{-1, 0, 1\}$, con $P(X = -1) = a = P(X = 1), P(X = 0) = 1 - 2a$; pertanto $\mathbb{P}(X) = 0, \mathbb{P}(X^2) = 2a, \sigma_X = \sqrt{2a}$. Inoltre: $XY \in \{0, 1\}$, con $P(XY = 1) = 2a$, $P(XY = 0) = 1 - 2a, \mathbb{P}(XY) = 2a$; allora: $Cov(X, Y) = \mathbb{P}(XY) - \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y) = 2a > 0$, per ogni $a \in (0, \frac{1}{2}]$. Pertanto, X e Y non sono indipendenti. Inoltre $Y \in \{-1, 1\}$, con $P(Y = -1) = p(-1,-1) + p(0,-1) = p(1,1) + p(0,1) = P(Y = 1) = \frac{1}{2}$; pertanto $\mathbb{P}(Y) = 0$, $\mathbb{P}(Y^2) = 1$, $\sigma_Y^2 = 1$. Allora

$$Cov(X + Y, X - Y) = Cov(X, X) - Cov(X, Y) + Cov(Y, X) - Cov(Y, Y) =$$

$$= Var(X) - Var(Y) = 2a - 1 = 0 \iff a = \frac{1}{2}\,.$$

4. Dalla condizione $\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = 1$, segue

$$\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} ae^{-\frac{x}{2}-2y}dy = a\int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left(\int_0^{+\infty} 2e^{-2y}dy\right)dx = a\int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx = a = 1\,.$$

Inoltre, il punto C è più vicino ad A se e solo se il veicolo in A è meno veloce; ovvero si verifica l'evento $(X < Y)$; pertanto

$$p = P(X<Y) = \int_0^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}-2y}dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left(\int_x^{+\infty} 2e^{-2y}dy\right)dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}\,e^{-\frac{x}{2}}\,e^{-2x}\,dx = \frac{1}{5}\int_0^{+\infty} \frac{5}{2}\,e^{-\frac{5}{2}x}\,dx = \frac{1}{5}\,.$$

5. Si ha $Y \geq 0$ e per ogni fissato $y > 0$ risulta

$$S_Y(y) = P(Y>y) = P\left(X > \frac{y}{5}\right) = S_X\left(\frac{y}{5}\right) = e^{-\frac{y}{5}}\,,\quad h_Y(y) = -\frac{S_Y'(y)}{S_Y(y)} = \frac{\frac{1}{5}e^{-\frac{y}{5}}}{e^{-\frac{y}{5}}} = \frac{1}{5}\,;$$

ovvero Y ha una distribuzione esponenziale di parametro $\frac{1}{5}$. Inoltre

$$p = P(Y>3|Y>2) = \frac{P(Y>3, Y>2)}{P(Y>2)} = \frac{P(Y>3)}{P(Y>2)} = \frac{e^{-\frac{3}{5}}}{e^{-\frac{2}{5}}} = e^{-\frac{1}{5}} = P(Y>1)\,.$$

(*proprietà di assenza di memoria:* $P(Y>3\,|\,Y>2) = P(Y>1+2\,|\,Y>2) = P(Y>1)$)

6. Si ha

$$\varphi_Y(t) = \mathbb{P}(e^{itY}) = \mathbb{P}(e^{it\frac{X+1}{\sqrt{2}}}) = \mathbb{P}(e^{i\frac{t}{\sqrt{2}}X}e^{\frac{it}{\sqrt{2}}}) = e^{\frac{it}{\sqrt{2}}}\varphi_X\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) = e^{\frac{it}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{it}{\sqrt{2}}-\frac{t^2}{2}} = e^{-\frac{t^2}{2}}\,.$$

Inoltre, ricordando la formula $\mathbb{P}(Y) = \frac{\varphi_Y'(0)}{i}$ e osservando che $\varphi_Y'(t) = -te^{-\frac{t^2}{2}}$, $\varphi_Y'(0) = 0$, segue: $\mathbb{P}(Y) = 0$ (*si noti che* $X \sim N_{-1,\sqrt{2}}$, *mentre* $Y \sim N_{0,1}$).

7. Si ha $f_{X_i}(x_i|\theta) = \theta e^{-\theta x_i}$, $i = 1,2,3$; allora, per la funzione di verosimiglianza, si ottiene $\alpha(\theta|\mathbf{x}) = \theta e^{-\theta x_1}\cdot\theta e^{-\theta x_2}\cdot\theta e^{-\theta x_3} = \theta^3 e^{-t\theta}$. Pertanto

$$\beta(\theta|\mathbf{x}) = k(\mathbf{x})\beta(\theta)\alpha(\theta|\mathbf{x}) = k(\mathbf{x})\frac{1}{2}\theta^2 e^{-\theta}\theta^3 e^{-t\theta} = k_1(\mathbf{x})\theta^5 e^{-(t+1)\theta}\,,\ \theta \geq 0\,;$$

ovvero $\Theta|\mathbf{x} \sim G_{6,t+1}(\theta)$, con $k_1(\mathbf{x}) = \frac{\lambda^c}{\Gamma(c)} = \frac{(t+1)^6}{5!}$. Allora

$$m_3 = \mathbb{P}(\Theta|\mathbf{x}) = \frac{c}{\lambda} = \frac{6}{t+1}\,,\qquad \sigma_3 = \sqrt{\frac{c}{\lambda^2}} = \frac{\sqrt{6}}{t+1}\,.$$