Probabilità e Statistica (12/9/2013)

(Ing. Civ. - Trasp. - Amb. Terr. - Elettr., Roma; esame da 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)
(esame da 5-6 crediti: risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Un vettore aleatorio continuo (X, Y) ha una distribuzione uniforme sul triangolo T di vertici i punti $(4, 4), (4, 0), (0, 4)$. Calcolare le densità marginali $f_1(x)$ ed $f_2(y)$; inoltre, calcolare la probabilità p dell'evento condizionato $(X + Y > 6 \mid X + Y > 5)$.

   $f_1(x) =$ $\qquad$ $f_2(y) =$ $\qquad$ $p =$

2. Da un lotto di 8 contenitori, dei quali 3 sono vuoti, un operatore preleva a caso 2 contenitori. Successivamente, l'operatore apre a caso uno dei 2 contenitori. Definiti gli eventi $H_r =$ *"fra i 2 contenitori prelevati a caso dall'operatore ve ne sono r vuoti"*, $r = 0, 1, 2$; $E =$ *"il contenitore aperto a caso dall'operatore è non vuoto"*, calcolare $p = P(E)$ e la probabilità condizionata γ che tutti e due i contenitori prelevati a caso dal lotto siano non vuoti, supposto vero E.

   $p =$ $\qquad$ $\gamma =$

3. Un sistema S è costituito da due dispositivi a e b in parallelo e b entra in funzione nell'istante in cui si guasta a. I tempi aleatori di durata fino al guasto, per a, b ed S, sono rispettivamente: X, Y e T. Assumendo che la densità congiunta del vettore aleatorio (X, Y) sia $f(x, y) = ke^{-3x-\frac{y}{3}}$, per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove, calcolare la costante k, il tempo medio di durata fino al guasto di S e il coefficiente di correlazione ρ_{XY}.

   $k =$ $\qquad$ $\mathbb{P}(T) =$ $\qquad$ $\rho_{XY} =$

4. Si considerino due urne U e V, con U contenente 3 palline bianche e 1 nera e V contenente 1 pallina bianca e 3 nere. Tizio e Caio effettuano, rispettivamente da U e V, 2 estrazioni con restituzione. Definiti gli eventi $A_i =$ *"l'i-ma pallina estratta da Tizio è bianca"*, $i = 1, 2$, $B_j =$ *"la j-ma pallina estratta da Caio è bianca"*, $j = 1, 2$, sia X il numero aleatorio di palline bianche estratte da Tizio; inoltre, sia Y il numero aleatorio di palline bianche estratte da Caio. Calcolare la probabilità α dell'evento condizionato $(X = 1|X + Y = 3)$ e la covarianza della coppia $(2X - Y, X + 2Y)$.

   $\alpha =$ $\qquad$ $Cov(2X - Y, X + 2Y) =$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, posto $Z = X - Y$, calcolare la probabilità $c_n = P(Z = n)$, per ogni valore possibile n di Z, e la funzione caratteristica di Z.

   $n :$
   $c_n :$ $\qquad$ $\varphi_Z(t) =$

6. Con riferimento all'esercizio 3, calcolare la funzione di sopravvivenza e la funzione di rischio del numero aleatorio T.

   $S_T(t) =$ $\qquad$ $h_T(t) =$

7. Su un lotto di 5 pezzi apparentemente identici sono possibili solo due ipotesi H_0, H_1, con $H_0 =$ *"nessuno dei 5 pezzi è difettoso"*, $H_1 =$ *"uno solo dei 5 pezzi è difettoso"*, con $P(H_1) = 4P(H_0)$. Un operatore controlla uno dopo l'altro tutti i pezzi. Definiti gli eventi $E_i =$ *"l'i-mo pezzo controllato è non difettoso"*, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, calcolare $P(E_5)$ e $P(E_5|E_1E_2E_3E_4)$.

   $P(E_5) =$ $\qquad$ $P(E_5|E_1E_2E_3E_4) =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civ. - Trasp. - Amb. Terr. - Elettr., Roma)
Soluzioni della prova scritta del 12/9/2013.

1. L'area del triangolo T è 8; pertanto la densità congiunta è $f(x,y)=\frac{1}{8}$, per $(x,y)\in T$, con $f(x,y)=0$ altrove. Inoltre, l'equazione della retta passante per i punti $(4,0),(0,4)$ è: $x+y=4$. Allora: $f_1(x)=\int_{4-x}^{4}\frac{1}{8}dy=\frac{x}{8}$, $0\le x\le 4$, con $f_1(x)=0$ altrove; $f_2(y)=\int_{4-y}^{4}\frac{1}{8}dx=\frac{y}{8}$, $0\le y\le 4$, con $f_2(y)=0$, altrove. Infine, sia T_1 il triangolo di vertici i punti $(4,4),(1,4),(4,1)$ e T_2 il triangolo di vertici i punti $(4,4),(2,4),(4,2)$. Tenendo conto che la distribuzione è uniforme, per ogni sottinsieme misurabile A di T, indicando con $\mu(A)$ l'area di A, si ha $\int\int_A f(x,y)dxdy=\frac{\mu(A)}{\mu(T)}=\frac{1}{8}\mu(A)$. Allora, osservando che $(X+Y>6)$ implica $(X+Y>5)$ e che $\mu(T_1)=\frac{9}{2},\mu(T_2)=2$, si ha

$$p=P(X+Y>6\,|\,X+Y>5)=\frac{P(X+Y>6,X+Y>5)}{P(X+Y>5)}=\frac{P(X+Y>6)}{P(X+Y>5)}=$$

$$=\frac{\int\int_{T_2}f(x,y)dxdy}{\int\int_{T_1}f(x,y)dxdy}=\frac{\frac{1}{8}\mu(T_2)}{\frac{1}{8}\mu(T_1)}=\frac{2}{\frac{9}{2}}=\frac{4}{9}\,.$$

2. Si ha: $P(H_r)=\frac{\binom{3}{r}\binom{5}{2-r}}{\binom{8}{2}}$, $r=0,1,2$; quindi: $P(H_0)=\frac{\binom{3}{0}\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{5}{14}$, $P(H_1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{8}{2}}=\frac{15}{28}$, $P(H_2)=\frac{\binom{3}{2}\binom{5}{0}}{\binom{8}{2}}=\frac{3}{28}$, con $P(E|H_0)=1$, $P(E|H_1)=\frac{1}{2}$, $P(E|H_2)=0$. Allora

$$p=P(E)=P(E|H_0)P(H_0)+P(E|H_1)P(H_1)+P(E|H_2)P(H_2)=1\cdot\frac{5}{14}+\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{28}=\frac{5}{8}\,;$$

inoltre: $\gamma=P(H_0|E)=\frac{P(E|H_0)P(H_0)}{P(E)}=\frac{1\cdot\frac{5}{14}}{\frac{5}{8}}=\frac{4}{7}$.

3. Si ha $k=1$; infatti

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=k\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-3x-\frac{y}{3}}dxdy=k\int_0^{+\infty}3e^{-3x}dx\int_0^{+\infty}\frac{1}{3}e^{-\frac{y}{3}}dy=k\,.$$

Inoltre $T=X+Y$, con $f_1(x)=\int_0^{+\infty}e^{-3x-\frac{y}{3}}dy=3e^{-3x}\int_0^{+\infty}\frac{1}{3}e^{-\frac{y}{3}}dy=3e^{-3x}$, $x\ge 0$; $f_2(y)=\int_0^{+\infty}e^{-3x-\frac{y}{3}}dx=\frac{1}{3}e^{-\frac{y}{3}}\int_0^{+\infty}3e^{-3x}dx=\frac{1}{3}e^{-\frac{y}{3}}$, $y\ge 0$.
Ovvero, X e Y hanno una distribuzione esponenziale di parametri $\lambda_1=3,\lambda_2=\frac{1}{3}$; pertanto $\mathbb{P}(T)=\mathbb{P}(X)+\mathbb{P}(Y)=\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3}$. Infine, X e Y sono stocasticamente indipendenti poichè $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$, $\forall(x,y)$; quindi $\rho_{XY}=0$.

4. Si ha: $X\sim B(2,\frac{3}{4}),Y\sim B(2,\frac{1}{4})$; inoltre, posto $P(X=h)=a_h,P(Y=k)=b_k$, si ha

$$a_h=\binom{2}{h}\left(\frac{3}{4}\right)^h\left(\frac{1}{4}\right)^{2-h},\ h=0,1,2,\quad b_k=\binom{2}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{2-k},\ k=0,1,2,$$

con $a_0=b_2=\frac{1}{16}$, $a_1=b_1=\frac{3}{8}$, $a_2=b_0=\frac{9}{16}$. X e Y sono stocasticamente indipendenti; quindi $P(X=h,Y=k)=a_hb_k$, per ogni h,k. Allora, osservando che

$$(X=1,X+Y=3)=(X=1,Y=2)\,,\quad(X+Y=3)=(X=1,Y=2)\vee(X=2,Y=1)\,,$$

segue: $\alpha = P(X=1|X+Y=3) = \frac{P(X=1,X+Y=3)}{P(X+Y=3)} = \frac{P(X=1,Y=2)}{P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)} = \frac{a_1b_2}{a_1b_2+a_2b_1} =$
$= \frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{16}}{\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{16}+\frac{9}{16}\cdot\frac{3}{8}} = \frac{1}{10}$. Inoltre, osservando che per una distribuzione $B(n,p)$ la varianza è npq, si ha $Var(X) = 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} = 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} = Var(Y)$. Allora, essendo $Cov(X,Y) = Cov(Y,X) = 0$, segue: $Cov(2X-Y, X+2Y) = 2Cov(X,X) + 4Cov(X,Y) - Cov(Y,X) - 2Cov(Y,Y) =$
$= 2Var(X) - 2Var(Y) = 0$.

5. Si ha $Z \in \{-2,-1,0,1,2\}$ e, poichè X e Y sono stocasticamente indipendenti, si ottiene

$$c_{-2} = a_0b_2 = \frac{1}{256}\,,\ c_{-1} = a_0b_1 + a_1b_2 = \frac{3}{64}\,,\ c_0 = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 = \frac{27}{128}\,,$$

$$c_1 = a_1b_0 + a_2b_1 = \frac{27}{64}\,,\quad c_2 = a_2b_0 = \frac{81}{256}\,.$$

Inoltre: $\varphi_Z(t) = \sum_{n=-2}^{2} c_n e^{itn} = \frac{e^{-2it}+12e^{-it}+54+108e^{it}+81e^{2it}}{256}$.
In alternativa: poichè $\varphi_X(t) = \left(\frac{3}{4}e^{it}+\frac{1}{4}\right)^2, \varphi_{-Y}(t) = \varphi_Y(-t) = \left(\frac{1}{4}e^{-it}+\frac{3}{4}\right)^2$, segue

$$\varphi_Z(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(-t) = \left(\frac{3}{4}e^{it}+\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}e^{-it}+\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{(3e^{it}+1)^2}{16}\cdot\frac{(e^{-it}+3)^2}{16} = \cdots\,.$$

6. Fissato $t > 0$, osservando che $(T \le t) = (X+Y \le t) = [(X,Y) \in A_t]$, dove A_t è il triangolo di vertici i punti $(0,0), (t,0), (0,t)$, si ha

$$F_T(t) = P(T \le t) = P(A_t) = \int\int_{A_t} f(x,y)dxdy = \int_0^t dx \int_0^{t-x} e^{3x-\frac{y}{3}}dy = \int_0^t 3e^{-3x}(1-e^{-\frac{t-x}{3}})dx =$$

$$= \int_0^t 3e^{-3x}dx - \frac{3}{8}e^{-\frac{t}{3}}\int_0^t \frac{8}{3}e^{-\frac{8x}{3}}dx = 1 - e^{-3t} - \frac{3}{8}e^{-\frac{t}{3}}(1-e^{-\frac{8t}{3}}) = 1 - \frac{3}{8}e^{-\frac{t}{3}} - \frac{5}{8}e^{-3t}\,;$$

quindi: $S_T(t) = 1 - F_T(t) = \frac{3}{8}e^{-\frac{t}{3}} + \frac{5}{8}e^{-3t}$; inoltre: $f_T(t) = F'_T(t) = \frac{1}{8}e^{-\frac{t}{3}} + \frac{15}{8}e^{-3t}$. Allora

$$h_T(t) = \frac{f_T(t)}{S_T(t)} = \frac{f_T(t)}{1-F_T(t)} = \frac{\frac{1}{8}e^{-\frac{t}{3}} + \frac{15}{8}e^{-3t}}{\frac{3}{8}e^{-\frac{t}{3}} + \frac{5}{8}e^{-3t}} = \frac{e^{\frac{8}{3}t}+15}{3e^{\frac{8}{3}t}+5}\,.$$

7. Si tratta di estrazioni senza restituzione da un lotto di composizione incognita, con $E_1,\ldots,E_5$ scambiabili. Osservando che $P(H_0) = \frac{1}{5}$, $P(H_1) = \frac{4}{5}$, $P(E_1|H_0) = 1$, $P(E_1|H_1) = \frac{4}{5}$, segue

$$P(E_5) = P(E_1) = P(E_1|H_0)P(H_0) + P(E_1|H_1)P(H_1) = 1\cdot\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{21}{25}\,.$$

Inoltre, osservando che $P(E_1\cdots E_4|H_0) = P(E_1\cdots E_5|H_0) = 1$, $P(E_1\cdots E_4|H_1) =$
$= P(E_5^c|H_1) = \frac{1}{5}$, $P(E_1\cdots E_5|H_1) = 0$, segue

$$P(E_1\cdots E_4) = P(E_1\cdots E_4|H_0)P(H_0) + P(E_1\cdots E_4|H_1)P(H_1) = 1\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{9}{25}\,;$$

$$P(E_1\cdots E_5) = P(E_1\cdots E_5|H_0)P(H_0) + P(E_1\cdots E_5|H_1)P(H_1) = 1\cdot\frac{1}{5} + 0\cdot\frac{4}{5} = \frac{1}{5}\,.$$

Pertanto: $P(E_5|E_1E_2E_3E_4) = \frac{P(E_1\cdots E_5)}{P(E_1\cdots E_4)} = \frac{5}{9}$.