Probabilità e Statistica (16/1/2014)

(Ing. Civ. - Trasp. - Amb. Terr. - Elettr., Roma; esame da 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)
(esame da 5-6 crediti: risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Su 100 componenti dello stesso tipo soltanto 70 sono buoni. Calcolare la probabilità α che scegliendo a caso 5 dei 100 componenti esattamente tre di essi siano buoni. Sia inoltre X il numero aleatorio di componenti buoni tra i 5 scelti a caso; indicando con m e σ la previsione e lo scarto quadratico medio di X, calcolare la probabilità β dell'evento $(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma)$.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad$ $\beta =$

2. La razione di tè erogata da un distributore automatico ha un peso aleatorio X (in grammi) con distribuzione di probabilità normale, con $\sigma = 2$. Valutando che il $20,05\%$ delle razioni contiene non meno di 50 grammi di tè, calcolare il peso medio μ delle razioni erogate dal distributore. Il guadagno è nullo quando la quantità erogata supera di 3σ il peso medio; qual'è la probabilità p di tale evento? (*Nota:* $\Phi(0.84) \simeq 0.7995$; $\Phi(3) \simeq 0.9987$)

   $\mu =$ $\qquad\qquad$ $p =$

3. Stabilire per quale valore di a la funzione $f(x) = 0$ per $x < 0$, $f(x) = \frac{x}{2a}$, per $x \in [0, 2a]$, $f(x) = \frac{1}{2x^2}$, per $x > 2a$, è una densità di probabilità. Determinare inoltre per ogni $x > 0$ la funzione $S(x) = P(X > x)$ e la probabilità $p = P(\frac{1}{2} < X < 2)$.

   $a =$ $\qquad\qquad$ $S(x) =$ $\qquad\qquad$ $p =$

4. I tempi aleatori impiegati da due veicoli per percorrere un tratto di strada sono rispettivamente X e Y. La densità congiunta del vettore (X, Y) è $f(x, y) = x + ay$, per $(x, y) \in (0, 1] \times (0, 1]$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante a; inoltre, posto $A = (X \leq Y), B = (X + Y \leq 1)$, stabilire se $P(A|B) = P(A^c|B)$.

   $a =$ $\qquad\qquad$ $P(A|B) = P(A^c|B)$?

5. La densità di un vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = \frac{3}{2} e^{-x-y}$, per $x \geq 0$ e $y \geq \frac{x}{2}$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare $h_1(x)$ e verificare se $P(X \leq 3|X \geq 2) = P(X \leq 1)$.

   $h_1(x) =$ $\qquad\qquad$ $P(X \leq 3|X \geq 2) = P(X \leq 1)$?

6. Tizio effettua 2 estrazioni con restituzione da un'urna contenente 2 palline bianche e 1 nera, mentre Caio effettua 4 estrazioni con restituzione da un'urna contenente 4 palline bianche e 2 nere. Siano X e Y i numeri aleatori di palline bianche ottenuti da Tizio e Caio. Posto $Z = X + Y$, calcolare: (i) $\varphi_Z(t)$; (ii) $p_z = P(Z = z)$; (iii) $Var(Z)$.

   $\varphi_Z(t) =$ $\qquad\qquad$ $p_z =$ $\qquad\qquad$ $Var(Z) =$

7. La distribuzione iniziale di un parametro aleatorio Θ è $\beta(\theta) = 4\theta^2 e^{-2\theta}$, per $\theta \geq 0$, con $\beta(\theta) = 0$ altrove. Le componenti di un campione casuale $(X_1, \ldots, X_5)$, subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione esponenziale di parametro θ. Indicando con $\mathbf{x}$ un campione osservato $(x_1, \ldots, x_5)$, con $x_1 + \cdots + x_5 = t$, calcolare la previsione m_5 e lo scarto quadratico medio σ_5 di $\Theta|\mathbf{x}$.

   $m_5 =$ $\qquad\qquad$ $\sigma_5 =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civ. - Trasp. - Amb. Terr. - Elettr., Roma)
Soluzioni della prova scritta del 16/1/2014.

1. Si ha $X \sim \mathbf{H}(N, n, p)$, con $N = 100$, $n = 5$, $p = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}$, $X \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Pertanto $\alpha = P(X = 3) = \frac{\binom{70}{3}\binom{30}{2}}{\binom{100}{5}} \simeq 0.3163$; inoltre: $m = \mathbb{P}(X) = np = 5 \cdot \frac{7}{10} = \frac{7}{2} = 3.5$; $\sigma = \sqrt{npq(1 - \frac{n-1}{N-1})} = \sqrt{5 \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{10}(1 - \frac{4}{99})} = \sqrt{\frac{133}{132}} \simeq 1$. Allora: $m - \sigma \simeq 2.5$, $m + \sigma \simeq 4.5$; pertanto: $\beta = P(X \in \{3, 4\}) = P(X = 3) + P(X = 4)$, con $P(X = 4) = \frac{\binom{70}{4}\binom{30}{1}}{\binom{100}{5}} \simeq 0.3654$; quindi: $\beta \simeq 0.3163 + 0.3654 = 0.6817$.

2. Per ipotesi $X \sim N_{\mu;2}$, con $P(X \geq 50) = 0,2005$. Considerando il n.a. standardizzato $Z = \frac{X-\mu}{2}$, si ha
$$P(X \geq 50) = P\left(\frac{X-\mu}{2} \geq \frac{50-\mu}{2}\right) = P\left(Z \geq \frac{50-\mu}{2}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{50-\mu}{2}\right) = 0,2005\,;$$
ovvero: $\Phi\left(\frac{50-\mu}{2}\right) = 0,7995$; quindi $\frac{50-\mu}{2} = 0,84$, da cui segue: $\mu = 48.32$.
Inoltre, $\mu + 3\sigma = 54.32$; pertanto
$$p = P(X \geq 54.32) = P(Z \geq \frac{54.32-\mu}{\sigma}) = P(Z \geq 3) = 1 - \Phi(3) \simeq 0,0013 = 0,13\%.$$

3. Dev'essere $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, ovvero
$$\int_0^{2a} \frac{x}{2a}\,dx + \int_{2a}^{+\infty} \frac{1}{2x^2}\,dx = \cdots = a + \frac{1}{4a} = 1\,,$$
pertanto: $a = \frac{1}{2}$. Inoltre, per $x \geq 1$ si ha $S(x) = P(X > x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^2}\,dt = \frac{1}{2x}$.
Per $x \in (0, 1)$ si ha
$$S(x) = \int_x^1 t\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{2t^2}\,dt = \cdots = 1 - \frac{x^2}{2}\,.$$
Infine
$$p = P(\frac{1}{2} < X < 2) = \int_{\frac{1}{2}}^2 f(x)\,dx = F(2) - F(\frac{1}{2}) = (1 - S(2)) - (1 - S(\frac{1}{2})) = \cdots = \frac{5}{8}\,.$$

4. Si ha
$$\int_0^1 dx \int_0^1 (x + ay)dy = \int_0^1 \left(x + \frac{a}{2}\right) dx = \frac{1}{2} + \frac{a}{2} = 1\,,$$
da cui segue: $a = 1$. Inoltre $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$, con
$$P(AB) = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{1-x} (x + y)dy = \cdots = \frac{1}{6}\,,\quad P(B) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x + y)dy = \cdots = \frac{1}{3}\,.$$
Quindi: $P(A|B) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} = 1 - P(A^c|B)$. Pertanto $A|B$ e $A^c|B$ sono equiprobabili.

5. Fissato $x \geq 0$, risulta

$$f_1(x) = \int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} \frac{3}{2}\, e^{-x-y} dy = \frac{3}{2}\, e^{-x}[-e^{-y}]_{\frac{x}{2}}^{+\infty} = \frac{3}{2}\, e^{-\frac{3}{2}\, x}\,;$$

ovvero X ha una distribuzione esponenziale di parametro $\frac{3}{2}$. Allora, fissato $x \geq 0$, risulta

$$S_1(x) = P(X > x) = \int_x^{+\infty} \frac{3}{2}\, e^{-\frac{3}{2}\, t} dt = e^{-\frac{3}{2}\, x}\,; \qquad h_1(x) = \frac{\frac{3}{2}\, e^{-\frac{3}{2}\, x}}{e^{-\frac{3}{2}\, x}} = \frac{3}{2}\,.$$

Inoltre, ricordando che $F_1(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \frac{3}{2}\, e^{-\frac{3}{2}\, t} dt = 1 - e^{-\frac{3}{2}\, x}$, si ha

$$p = P(X \leq 3 | X \geq 2) = \frac{P(2 \leq X \leq 3)}{P(X \geq 2)} = \frac{e^{-3} - e^{-\frac{9}{2}}}{e^{-3}} = 1 - e^{-\frac{3}{2}} = P(X \leq 1)\,.$$

6. Si ha $X \sim B(2, \frac{2}{3})$, $Y \sim B(4, \frac{2}{3})$; pertanto: $\varphi_X(t) = (\frac{2}{3}\, e^{it} + \frac{1}{3})^2$, $\varphi_Y(t) = (\frac{2}{3}\, e^{it} + \frac{1}{3})^4$. Allora, dall'indipendenza di X e Y segue: $\varphi_Z(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = (\frac{2}{3}\, e^{it} + \frac{1}{3})^6$ e quindi: $Z \sim B(6, \frac{2}{3})$; ovvero $p_z = \binom{6}{z} (\frac{2}{3})^z (\frac{1}{3})^{6-z}$, $z = 0, 1, \ldots, 6$. Infine: $Var(Z) = npq = 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.

7. Si ha $f_{X_i}(x_i|\theta) = \theta e^{-\theta x_i}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$; allora, per la funzione di verosimiglianza, si ottiene $\alpha(\theta|\mathbf{x}) = \theta e^{-\theta x_1} \cdots \theta e^{-\theta x_5} = \theta^5 e^{-t\theta}$. Pertanto

$$\beta(\theta|\mathbf{x}) = k(\mathbf{x})\beta(\theta)\alpha(\theta|\mathbf{x}) = k(\mathbf{x}) 4\theta^2 e^{-2\theta} \theta^5 e^{-t\theta} = k_1(\mathbf{x})\theta^7 e^{-(t+2)\theta}\,,\ \theta \geq 0\,;$$

ovvero $\Theta|\mathbf{x} \sim G_{c_5,\lambda_5}(\theta) = G_{8,t+2}(\theta)$, con $k_1(\mathbf{x}) = \frac{\lambda_5^{c_5}}{\Gamma(c_5)} = \frac{(t+2)^8}{7!}$. Allora

$$m_5 = \mathbb{P}(\Theta|\mathbf{x}) = \frac{c_5}{\lambda_5} = \frac{8}{t+2}\,, \qquad \sigma_5 = \sqrt{\frac{c_5}{\lambda_5^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{t+2}\,.$$