Probabilità e Statistica (11/2/2014)

(Ing. Civ. - Trasp. - Amb. Terr. - Elettr., Roma; esame da 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)
(esame da 5-6 crediti: risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Un modem trasmette un fax ad un numero telefonico che è occupato l'80% delle volte, ripetendo il numero fino a quando lo trova libero. Sia X il numero aleatorio di tentativi e sia E_i l'evento "il numero di telefono è libero alla i-esima composizione", $i \in N$. Supponendo $E_1, E_2, \ldots,$ stocasticamente indipendenti, calcolare $\alpha = P(X = 5)$. Inoltre, se nelle prime 3 telefonate il numero è occupato, qual è la probabilità β che il numero sia occupato nelle successive 4 telefonate. Infine, calcolare la previsione di X.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad$ $\beta =$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{P}(X) =$

2. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x-1)^2+(y-1)^2}{2}}$. Calcolare la probabilità condizionata $p = P[(0 \leq X \leq 2, 0 \leq Y \leq 2) \,|\, (X \leq 2, Y \leq 2)]$ e lo scarto quadratico medio σ_Z del numero aleatorio $Z = X - Y$.

   $p =$ $\qquad\qquad$ $\sigma_Z =$

3. Siano date due urne U_1 e U_2, la prima contenente 2 palline rosse e 3 nere, la seconda contenente 3 palline rosse e 2 nere. Da una delle due, scelta effettuando 3 lanci di una moneta, si effettuano estrazioni con restituzione; si sceglie U_1 se esce più volte Testa, si sceglie U_2 nel caso contrario. Definiti gli eventi $R_i =$ *"l'i-ma pallina estratta è rossa"*, $i = 1, 2$, calcolare la probabilità α dell'evento condizionato $U_1|R_1$; *(ii)* la probabilità β dell'evento condizionato $R_2|R_1$.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad$ $\beta =$

4. La densità di probabilità di un numero aleatorio continuo $X \in [-1, 3]$ è $f(x) = \frac{1}{4}$ per $x \in [-1, 0] \cup [2, 3]$, $f(x) = a$ per $X \in (0, 2)$, con $f(x) = 0$ altrove. Calcolare la costante a, la previsione di X e la sua funzione di ripartizione.

   $a =$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{P}(X) =$ $\qquad\qquad$ $F(x) =$

5. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = ae^{-x-y}$ per $x \geq 0$, $0 \leq y \leq 2x$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante a e la funzione di rischio di $Z = X + Y$.

   $a =$ $\qquad\qquad$ $h_Z(z) =$

6. Siano X, Y due numeri aleatori stocasticamente indipendenti con distribuzione di Poisson di parametri λ_1, λ_2. Calcolare: (i) $Cov(X + Y, X - Y)$; (ii) $P(X = n, Y = n|Z = 2n)$. (*ricordiamo che la funzione caratteristica di una distribuzione di Poisson è* $e^{\lambda(e^{it}-1)}$)

   $Cov(X+Y, X-Y) =$ $\qquad\qquad$ $P(X = n, Y = n|Z = 2n) =$

7. Dati 3 eventi scambiabili A, B, C, con $P(A) = \frac{1}{2}, P(AB) = \frac{2}{9}, P(ABC) = \frac{1}{12}$, calcolare $\alpha = P(A^c|BC)$ e $\beta = P(AC|ABC \vee A^cB^cC^c)$.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad$ $\beta =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civ. - Trasp. - Amb. Terr. - Elettr., Roma)
Soluzioni della prova scritta del 11/2/2014.

1. $E_1, E_2, \ldots,$ sono stocasticamente indipendenti ed equiprobabili con $P(E_i) = \frac{1}{5}$, $i \in N$; pertanto $X \sim G(\frac{1}{5})$. Allora

$$\alpha = P(X = 5) = P(E_1^c \cdots E_4^c E_5) = \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^4 \simeq 0.0819\,.$$

Inoltre, dalla proprietà di assenza di memoria si ha

$$\beta = P(X > 7 | X > 3) = P(X > 4) = \left(\frac{4}{5}\right)^4 \simeq 0.4096\,.$$

Infine, $\mu = \mathbb{P}(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5\,.$

2. Si ha

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-1)^2}{2}}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}\,;$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-1)^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-1)^2}{2}}\,.$$

Allora: $X \sim N_{1,1}$, $Y \sim N_{1,1}$; inoltre, $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$; ovvero X e Y sono stocasticamente indipendenti. Pertanto

$$p = P[(0 \le X \le 2, 0 \le Y \le 2)\,|\,(X \le 2, Y \le 2)] = \frac{P(0 \le X \le 2, 0 \le Y \le 2)}{P(X \le 2, Y \le 2)} =$$

$$= \frac{[\Phi_{1,1}(2) - \Phi_{1,1}(0)][\Phi_{1,1}(2) - \Phi_{1,1}(0)]}{\Phi_{1,1}(2)\Phi_{1,1}(2)} = \frac{[\Phi_{0,1}(1) - \Phi_{0,1}(-1)]^2}{[\Phi_{0,1}(1)]^2} \simeq \frac{(0.6826)^2}{(0.8413)^2} \simeq 0.6583\,.$$

Infine: $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 1$, $Cov(X,Y) = 0$; allora: $\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 = 2$; ovvero: $\sigma_Z = \sqrt{2}$.

3. Indicando con X il numero aleatorio di volte in cui esce Testa su 3 lanci della moneta, si ha $X \in \{0,1,2,3\}$, con $X \sim B(3, \frac{1}{2})$; pertanto

$$P(U_1) = P(X > 1) = P(X = 2) + P(X = 3) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} = P(U_2)\,.$$

Inoltre

$$P(R_1|U_1) = P(R_2|U_1) = \frac{2}{5}\,;\; P(R_1R_2|U_1) = \frac{4}{25}\,;\; P(R_1|U_2) = P(R_2|U_2) = \frac{3}{5}\,;\; P(R_1R_2|U_2) = \frac{9}{25}\,;$$

allora

$$P(U_1|R_1) = \frac{P(R_1|U_1)P(U_1)}{P(R_1|U_1)P(U_1) + P(R_1|U_2)P(U_2)} = \frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}\,;$$

$$P(R_2|R_1) = \frac{P(R_1R_2)}{P(R_1)} = \frac{P(R_1R_2|U_1)P(U_1) + P(R_1R_2|U_2)P(U_2)}{P(R_1|U_1)P(U_1) + P(R_1|U_2)P(U_2)} = \frac{\frac{4}{25}\cdot\frac{1}{2} + \frac{9}{25}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{13}{25}\,.$$

4. Si ha
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{4}dx + \int_{0}^{2} a dx + \int_{2}^{3} \frac{1}{4}dx = \frac{1}{4} + 2a + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + 2a = 1\,;$$
pertanto: $a = \frac{1}{4}$; ovvero X ha una distribuzione uniforme in $[-1, 3]$. Allora: $\mathbb{P}(X) = \frac{-1+3}{2} = 1$; inoltre, $F(x) = 0$ per $x \leq -1$; $F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{1}{4}dt = \frac{x+1}{4}$ per $x \in (-1, 3)$; $F(x) = 1$ per $x \geq 3$.

5. Si ha
$$\int_{0}^{+\infty} dx \int_{0}^{2x} a e^{-x-y} dy = a \int_{0}^{+\infty} e^{-x}(1-e^{-2x})dx = a \int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx - \frac{a}{3} \int_{0}^{+\infty} 3e^{-3x}dx = a - \frac{a}{3} = 1\,;$$
pertanto $a = \frac{3}{2}$. Inoltre, $Z = X + Y \geq 0$ e per ogni fissato $z > 0$, osservando che il punto di intersezione delle rette $x + y = z, y = 2x$ è $(\frac{z}{3}, \frac{2}{3}z)$, si ha
$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) = \int_{0}^{\frac{2}{3}z} dy \int_{\frac{y}{2}}^{z-y} \frac{3}{2} e^{-x-y} dx = \cdots =$$
$$= -\frac{3}{2} \int_{0}^{\frac{2}{3}z} e^{-z}dy + \frac{3}{2} \int_{0}^{\frac{2}{3}z} e^{-\frac{3}{2}y}dy = \cdots = 1 - e^{-z} - ze^{-z}\,; \quad S_Z(z) = 1 - F_Z(z) = e^{-z} + ze^{-z}\,;$$
$f_Z(z) = F_Z'(z) = ze^{-z}$, $z \geq 0$, con $f_Z(z) = 0$ altrove. Pertanto: $h_Z(z) = \frac{f_Z(z)}{S_Z(z)} = \frac{z}{1+z}$.

6. Si ha $Var(X) = \lambda_1, Var(Y) = \lambda_2, Cov(X, Y) = 0$; pertanto: $Cov(X + Y, X - Y) =$
$$= Cov(X, X) - Cov(X, Y) + Cov(Y, X) - Cov(Y, Y) = Var(X) - Var(Y) = \lambda_1 - \lambda_2\,.$$
Inoltre, si ha: $\varphi_X(t) = e^{\lambda_1(e^{it}-1)}$, $\varphi_Y(t) = e^{\lambda_2(e^{it}-1)}$; pertanto
$$\varphi_Z(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)}\,;$$
quindi Z ha una distribuzione di Poisson di parametro $\lambda_1 + \lambda_2$. Allora
$$P(X = n, Y = n|Z = 2n) = \frac{P(X = n)P(Y = n)}{P(Z = 2n)} = \frac{\frac{\lambda_1^n}{n!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^n}{n!}e^{-\lambda_2}}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^{2n}}{(2n)!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}} =$$
$$= \binom{2n}{n}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^n\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^n.$$

7. Si ha: $P(A^cBC) = P(BC) - P(ABC) = P(AB) - P(ABC) = \frac{2}{9} - \frac{1}{12} = \frac{5}{36}$; pertanto: $\alpha = \frac{P(A^cBC)}{P(BC)} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{2}{9}} = \frac{5}{8}$. Inoltre, osservando che
$$P(A \vee B \vee C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) =$$
$$= 3P(A) - 3P(AB) + P(ABC) = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{11}{12}\,,$$
segue: $P(A^cB^cC^c) = 1 - P(A \vee B \vee C) = \frac{1}{12}$; pertanto
$$\beta = P(AC|ABC \vee A^cB^cC^c) = \frac{P(ABC)}{P(ABC) + P(A^cB^cC^c)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12} + \frac{1}{12}} = \frac{1}{2}\,.$$