Probabilità e Statistica (10/7/2014)

(Ing. Civ. - Trasp. - Clin. - Elettr., Roma; esame da 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)

(esame da 5-6 crediti: risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Dati 3 eventi E_1, E_2, E_3, con $P(E_1) = P(E_2) = \frac{3}{5}$, $P(E_1E_2) = P(E_2E_3) = \frac{3}{10}$, $P(E_1E_2E_3) = \frac{1}{10}$, calcolare la probabilità p dell'evento $E_1E_2^c \vee E_1^cE_2E_3$. Inoltre, calcolare la funzione di ripartizione del numero aleatorio $X = |E_1| + |E_2|$.

   $p =$ $\qquad\qquad\qquad$ $F(x) =$

2. Il tempo aleatorio X, impiegato in un percorso, ha una densità $f(x) = 0$, per $x < 1$, $f(x) = ax$, per $x \in [1, 2]$ ed $f(x) = \frac{4}{x^3}$, per $x > 2$; calcolare la costante a. Inoltre, indicando con m la previsione di X, stabilire se $P(X > m) < P(X \leq m)$.

   $a =$ $\qquad\qquad\qquad$ $P(X > m) < P(X \leq m)$?

3. Tizio effettua un numero aleatorio X di estrazioni con restituzione, fino ad ottenere per la prima volta pallina bianca, da un'urna contenente 1 pallina bianca e 2 nere; Caio ripete l'esperimento effettuando un numero aleatorio Y di estrazioni con restituzione. Calcolare la varianza di $X - Y$ e la probabilità γ dell'evento condizionato $(X = 1)|(X + Y = 3)$.

   $Var(X - Y) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\gamma =$

4. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(x-1)^2+(y-1)^2}{2}}$, per ogni (x, y). Calcolare la varianza del numero aleatorio $2X - 3Y$ e la probabilità p dell'evento condizionato $(1 \leq X \leq 2, 0 \leq Y \leq 1)|(0 \leq X \leq 2, 0 \leq Y \leq 2)$.

   $Var(2X - 3Y) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $p =$

5. Con riferimento all'esercizio 1, calcolare la funzione caratteristica del numero aleatorio $Y = |E_1E_2| + |E_2E_3|$. Inoltre, assumendo $P(E_1^cE_3^c) = P(E_1^cE_2^c)$, verificare se $P(E_1^cE_2^cE_3^c) = 0$.

   $\varphi_Y(t) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $P(E_1^cE_2^cE_3^c) = 0$? *SI* *NO*

6. I guadagni aleatori X, Y relativi a due investimenti finanziari hanno una densità congiunta $f(x, y) = 2e^{-2x-y}$, per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Indicando con Z il massimo di X, Y, calcolare la funzione di rischio $h(z)$ e la previsione μ di Z.

   $h(z) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\mu =$

7. Dati 3 eventi scambiabili E_1, E_2, E_3, con $P(E_1) = \frac{2}{5}$, $P(E_1E_2) = \frac{1}{10}$, $P(E_1E_2E_3) = 0$, calcolare $\alpha = P(E_1E_2 \vee E_2E_3 \,|\, E_1E_2 \vee E_2E_3 \vee E_1E_3)$ e $\beta = P(E_1^cE_2^c \,|\, E_1^cE_2^c \vee E_2^cE_3^c)$.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\beta =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civ. - Trasp. - Clin.- Elettr., Roma)

Soluzioni della prova scritta del 10/7/2014.

1. Si ha $p = P(E_1E_2^c \vee E_1^cE_2E_3) = P(E_1E_2^c)+P(E_1^cE_2E_3)$, con $P(E_1E_2^c) = P(E_1)-P(E_1E_2) = \frac{3}{5}-\frac{3}{10} = \frac{3}{10}$, $P(E_1^cE_2E_3) = P(E_2E_3)-P(E_1E_2E_3) = \frac{3}{10}-\frac{1}{10} = \frac{1}{5}$; pertanto: $p = \frac{3}{10}+\frac{1}{5} = \frac{1}{2}$. Inoltre $X \in \{0,1,2\}$, con
$$P(X=0) = P(E_1^cE_2^c) = 1-[P(E_1)+P(E_2)-P(E_1E_2)] = 1-(\frac{3}{5}+\frac{3}{5}-\frac{3}{10}) = \frac{1}{10}\,,$$
$$P(X=2) = P(E_1E_2) = \frac{3}{10}\,;\;\; P(X=1) = 1-P(X=0)-P(X=2) = \frac{6}{10}\,.$$
Allora: $F(x) = 0$, per $x < 0$; $F(x) = \frac{1}{10}$, per $0 \le x < 1$; $F(x) = \frac{1}{10}$, per $0 \le x < 1$; $F(x) = \frac{7}{10}$, per $1 \le x < 2$; $F(x) = 1$, per $x \ge 2$.

2. Dev'essere $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_1^2 ax\,dx + \int_2^{+\infty} \frac{4}{x^3}\,dx = \left[a\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + \left[-\frac{4}{2x^2}\right]_2^{+\infty} = \frac{3}{2}a + \frac{1}{2} = 1$, pertanto: $a = \frac{1}{3}$. Allora
$$m = \mathbb{P}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{3}\int_1^2 x^2dx + \int_2^{+\infty}\frac{4}{x^2}\,dx = \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^2 + \left[-\frac{4}{x}\right]_2^{+\infty} = \frac{7}{9}+2 = \frac{25}{9}\,;$$
quindi: $P(X > m) = P(X > \frac{25}{9}) = \int_{\frac{25}{9}}^{+\infty}\frac{4}{x^3}\,dx = \left[-\frac{4}{2x^2}\right]_{\frac{25}{9}}^{+\infty} = \frac{162}{625} \simeq 0.26$, con $P(X \le m) = 1-P(X > m) \simeq 0.74$. Pertanto: $P(X > m) < P(X \le m)$.

3. X e Y sono stocasticamente indipendenti e ugualmente distribuiti, con distribuzione geometrica di parametro $p = \frac{1}{3}$. Allora: $Var(X) = Var(Y) = \frac{q}{p^2} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{9}} = 6$, $Var(X-Y) = Var(X)+Var(Y) = 12$. Inoltre: $P(X=h) = P(Y=h) = pq^{h-1} = \frac{2^{h-1}}{3^h}, h = 1,2,\ldots$; $X+Y \in \{2,3,\ldots\}$, con $P(X+Y=3) = P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1) =$
$= P(X=1)P(Y=2)+P(X=2)P(Y=1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}$. Pertanto
$$\gamma = P(X=1\,|\,X+Y=3) = \frac{P(X=1,X+Y=3)}{P(X+Y=3)} = \frac{P(X=1,Y=2)}{P(X+Y=3)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\,.$$

4. Si ha
$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(x-1)^2+(y-1)^2}{2}}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-1)^2}{2}}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}\,;$$
$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(x-1)^2+(y-1)^2}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-1)^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-1)^2}{2}}\,;$$
pertanto: $X \sim N_{1,1}$, $Y \sim N_{1,1}$, con $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$; ovvero X e Y sono stocasticamente indipendenti. Allora: $V(2X-3Y) = 4Var(X)+9Var(Y) = 4+9 = 13$. Inoltre, osservando che $(1 \le X \le 2, 0 \le Y \le 1)\wedge(0 \le X \le 2, 0 \le Y \le 2) = (1 \le X \le 2, 0 \le Y \le 1)$, segue
$$p = P[(1 \le X \le 2, 0 \le Y \le 1)|(0 \le X \le 2, 0 \le Y \le 2)] = \frac{P(1 \le X \le 2, 0 \le Y \le 1)}{P(0 \le X \le 2, 0 \le Y \le 2)} =$$

$$= \frac{P(1 \le X \le 2)P(0 \le Y \le 1)}{P(0 \le X \le 2)P(0 \le Y \le 2)} = \frac{[\Phi_{1,1}(2) - \Phi_{1,1}(1)][\Phi_{1,1}(1) - \Phi_{1,1}(0)]}{[\Phi_{1,1}(2) - \Phi_{1,1}(0)][\Phi_{1,1}(2) - \Phi_{1,1}(0)]} =$$

$$= \frac{[\Phi(1) - \Phi(0)][\Phi(0) - \Phi(-1)]}{[\Phi(1) - \Phi(-1)][\Phi(1) - \Phi(-1)]} = \frac{[\Phi(1) - \Phi(0)]^2}{[\Phi(1) - \Phi(-1)]^2} = \frac{[\Phi(1) - \Phi(0)]^2}{(2[\Phi(1) - \Phi(0)])^2} = \frac{1}{4}\,.$$

5. Si ha $Y \in \{0, 1, 2\}$, con $P(Y = 1) = P(E_1E_2E_3^c \vee E_1^cE_2E_3) = P(E_1E_2E_3^c) + P(E_1^cE_2E_3) =$ $= P(E_1E_2) - P(E_1E_2E_3) + P(E_2E_3) - P(E_1E_2E_3) = \frac{2}{5}$ e con $P(Y = 2) = P(E_1E_2E_3) = \frac{1}{10}$. Allora: $P(Y = 0) = 1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{10} = \frac{1}{2}$; pertanto, posto $P(Y = h) = p_h$, si ha

$$\varphi_Y(t) = \sum_{h=0}^{2} p_h e^{ith} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5}e^{it} + \frac{1}{10}e^{2it}\,.$$

Inoltre, osservando che $E_1^cE_2^c \vee E_2^c = E_2^c \vee E_2^cE_3^c = E_2^c$, segue

$$(Y = 0) = (E_1E_2)^c \wedge (E_2E_3)^c = (E_1^c \vee E_2^c) \wedge (E_2^c \vee E_3^c) = E_1^cE_2^c \vee E_1^cE_3^c \vee E_2^c \vee E_2^cE_3^c =$$

$= E_1^cE_3^c \vee E_2^c$; allora

$$P(Y = 0) = \frac{1}{2} = P(E_1^cE_3^c \vee E_2^c) = P(E_1^cE_3^c) + P(E_2^c) - P(E_1^cE_2^cE_3^c) = P(E_1^cE_2^c) + P(E_2^c) - P(E_1^cE_2^cE_3^c) =$$

$$= 1 - [P(E_1) + P(E_2) - P(E_1E_2)] + 1 - P(E_2) - P(E_1^cE_2^cE_3^c) = \cdots = \frac{1}{2} - P(E_1^cE_2^cE_3^c)\,,$$

da cui segue: $P(E_1^cE_2^cE_3^c) = 0$.

6. Per ogni fissato $z > 0$, si ha

$$F(z) = P(Z \le z) = P(X \le z, Y \le z) = \int_0^z \int_0^z 2e^{-2x-y}dxdy = \int_0^z 2e^{-2x}dx \int_0^z e^{-y}dy =$$

$$= (1 - e^{-2z})(1 - e^{-z}) = 1 - e^{-z} - e^{-2z} + e^{-3z}\,; \quad S(z) = 1 - F(z) = e^{-z} + e^{-2z} - e^{-3z}\,.$$

Pertanto: $h(z) = \frac{f(z)}{S(z)} = \frac{-S'(z)}{S(z)} = \frac{e^{-z}+2e^{-2z}-3e^{-3z}}{e^{-z}+e^{-2z}-e^{-3z}} = \frac{e^{2z}+2e^{z}-3}{e^{2z}+e^{z}-1}$. Inoltre, ricordando che $\int_0^{+\infty} \lambda z e^{-\lambda z}dz = \frac{1}{\lambda}$, si ha

$$\mu = \int_0^{+\infty} zf(z)dz = \int_0^{+\infty} ze^{-z}dz + \int_0^{+\infty} 2ze^{-2z}dz - \int_0^{+\infty} 3ze^{-3z}dz = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}\,.$$

7. Osservando che $(E_1E_2 \vee E_2E_3) \wedge (E_1E_2 \vee E_2E_3 \vee E_1E_3) = E_1E_2 \vee E_2E_3$, con

$$P(E_1E_2 \vee E_2E_3) = P(E_1E_2) + P(E_2E_3) - P(E_1E_2E_3) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - 0 = \frac{1}{5}\,,$$

$$P(E_1E_2 \vee E_2E_3 \vee E_1E_3) = P(E_1E_2) + P(E_2E_3) + P(E_1E_3) - 3P(E_1E_2E_3) + P(E_1E_2E_3) = \frac{3}{10}\,,$$

si ha $\alpha = \frac{P(E_1E_2 \vee E_2E_3)}{P(E_1E_2 \vee E_2E_3 \vee E_1E_3)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{3}$. Inoltre, si ha: $(E_1^cE_2^c) \wedge (E_1^cE_2^c \vee E_2^cE_3^c) = E_1^cE_2^c$, con $P(E_1^cE_2^c) = 1 - P(E_1 \vee E_2) = 1 - (\frac{2}{5} + \frac{2}{5} - \frac{1}{10}) = \frac{3}{10}$; infine, si ha: $P(E_1^cE_2^c \vee E_2^cE_3^c) =$ $P(E_1^cE_2^c) + P(E_2^cE_3^c) - P(E_1^cE_2^cE_3^c) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} - [1 - P(E_1 \vee E_2 \vee E_3)] = -\frac{2}{5} + (3 \cdot \frac{2}{5} - 3 \cdot \frac{1}{10} + 0) = \frac{1}{2}$. Pertanto: $\beta = \frac{P(E_1^cE_2^c)}{P(E_1^cE_2^c \vee E_2^cE_3^c)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$.