Probabilità e Statistica (10/9/2015)

(Ing. Civile - Trasporti - Elettronica, Roma; esame da 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)
(esame da 6 crediti: risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Dati due numeri aleatori X, Y, stocasticamente indipendenti e con uguale distribuzione di Poisson, di parametro $\lambda = 1$, sia $U = X + aY, V = aX - Y$. Calcolare la probabilità condizionata $\alpha = P(X + Y > 0 \,|\, X + Y < 2)$ e la covarianza di U, V.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad$ $Cov(U, V) =$

2. Un autoveicolo percorre in andata e ritorno un tratto di strada, impiegando un tempo aleatorio (in ore) X in andata e Y nel ritorno. La densità congiunta del vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = k(x - y)$, per $(x, y) \in Q = [2, 3] \times [1, 2]$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante k; inoltre, indicando con Z il tempo aleatorio totale di percorrenza, calcolare la previsione m di Z e la probabilità p dell'evento $(Z > 4)$.

   $k =$ $\qquad\qquad$ $m =$ $\qquad\qquad$ $p =$

3. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione di ripartizione F_1 di X e il valore x_0 tale che $P(X > x_0) = 2P(X \leq x_0)$.

   $F_1(x) =$ $\qquad\qquad$ $x_0 =$

4. Dati 3 eventi A, B, C, indipendenti ed equiprobabili di probabilità p, con $0 < p < 1$, sia $X = |A| - |B|$ e $Y = |B| - |C|$. Determinare: (i) il valore di p tale che la covarianza di X e Y sia minima; (ii) il coefficiente di correlazione ρ di X, Y.

   $p =$ $\qquad\qquad$ $\rho =$

5. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = \frac{1}{8\pi}\, e^{-\frac{(x-1)^2+(y+1)^2}{8}}$. Calcolare la funzione caratteristica del numero aleatorio $Z = X - Y$ e la probabilità p dell'evento condizionato $(Z > 2 + 4\sqrt{2} \mid Z > 2 + 2\sqrt{2})$.
   (*ricordiamo che per una distribuzione normale $N_{m,\sigma}$ si ha $\varphi(t) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$*).

   $\varphi_Z(t) =$ $\qquad\qquad$ $p =$

6. Un sistema S è costituito da tre dispositivi in parallelo d_1, d_2, d_3, messi in funzione nello stesso istante. I tempi aleatori di durata dei tre dispositivi, X_1, X_2, X_3, sono indipendenti e con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1$. Sia T il tempo aleatorio di durata fino al guasto di S. Calcolare la previsione μ_T e la funzione di rischio $h_T(t)$.

   $\mu =$ $\qquad\qquad$ $h_T(t) =$

7. Tizio e Caio estraggono, senza restituzione, tutte le palline da un'urna che ne contiene 2 bianche e 4 nere. Tizio effettua le prime 3 estrazioni e Caio le ultime 3; chi estrae più palline bianche vince un premio. Definiti gli eventi $A =$ "Tizio vince il premio", $B =$ "Caio vince il premio", $E_i =$ "l'i-ma pallina estratta è bianca", $i = 1, \ldots, 6$, calcolare la probabilità α che nè Tizio nè Caio vincano il premio; inoltre, calcolare la probabilità condizionata β che Tizio vinca il premio, supposto che uno dei due vinca il premio; infine stabilire se gli eventi $E_1, \ldots, E_6$ sono scambiabili.
   (*indicare con X il numero aleatorio di palline bianche estratte da Tizio*)

   $\alpha =$ $\qquad\qquad$ $\beta =$ $\qquad\qquad$ $E_1, \ldots, E_6$ *scambiabili ?*

Probabilità e Statistica (Ing. Civile - Trasporti - Elettronica, Roma)

Soluzioni della prova scritta del 10/9/2015.

1. Si ha $X \in \{0,1,\ldots\}, Y \in \{0,1,\ldots\}, X+Y \in \{0,1,\ldots\}$, con $P(X=h) = P(Y=h) = = \frac{e^{-1}}{h!}, P(X=h, Y=k) = P(X=h)P(Y=k) = \frac{e^{-2}}{h!k!}, h = 0,1,\ldots, k = 0,1,\ldots$; allora
$$\alpha = \frac{P(X+Y>0, X+Y<2)}{P(X+Y<2)} = \frac{P(X+Y=1)}{P(X+Y=0)+P(X+Y=1)} =$$
$$= \frac{P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)}{P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)} = \frac{e^{-2}+e^{-2}}{e^{-2}+e^{-2}+e^{-2}} = \frac{2}{3}\,.$$
Inoltre, osservando che $Var(X) = Var(Y) = \lambda = 1$, $Cov(X,Y) = Cov(Y,X) = 0$, segue
$$Cov(U,V) = Cov(X+aY, aX-Y) = aCov(X,X) - Cov(X,Y) + a^2Cov(Y,X) - aCov(Y,Y) =$$
$$= a[Var(X) - Var(Y)] = a(1-1) = 0\,.$$
In alternativa: $\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y) = \lambda = 1, \mathbb{P}(X^2) = \mathbb{P}(Y^2) = Var(X) + [\mathbb{P}(X)]^2 = \lambda + \lambda^2 = 2$, $\mathbb{P}(XY) = \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y) = 1$, $Cov(U,V) = \mathbb{P}(UV) - \mathbb{P}(U)\mathbb{P}(V)$, con $\mathbb{P}(UV) = \mathbb{P}(aX^2 - XY + a^2XY - aY^2) = a^2 - 1$; $\mathbb{P}(U) = \mathbb{P}(X) + a\mathbb{P}(Y) = 1 + a$, $\mathbb{P}(V) = a\mathbb{P}(X) - \mathbb{P}(Y) = a - 1$; $\mathbb{P}(U)\mathbb{P}(V) = a^2 - 1 = \mathbb{P}(UV)$; pertanto: $Cov(U,V) = \mathbb{P}(UV) - \mathbb{P}(U)\mathbb{P}(V) = 0$.

2. Si ha
$$\int_2^3 \int_1^2 k(x-y)dxdy = \cdots = k(\frac{9}{2} - \frac{9}{2} - 2 + 3) = 1\,;$$
pertanto: $k = 1$. Inoltre
$$m = \mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}(X+Y) = \int_2^3 \int_1^2 (x+y)(x-y)dxdy = \cdots = \int_2^3 \left(x^2 - \frac{7}{3}\right) dx = \cdots = 4\,.$$
Infine
$$p = P(Z > 4) = \int_2^3 dx \int_{4-x}^2 (x-y)dy = \cdots = \int_2^3 \left(-6x + 6 + \frac{3}{2}x^2\right) dx = \cdots = \frac{1}{2}\,.$$

3. Si ha $X \in [2,3]$; quindi $P(X \le x) = F_1(x) = 0$ per ogni $x \le 2$; $P(X \le x) = F_1(x) = 1$ per ogni $x \ge 3$; inoltre, per $x \in (2,3)$ si ha
$$P(X \le x) = F_1(x) = P(X \le x, 1 \le Y \le 2) = \int_2^x \int_1^2 (u-y)dudy =$$
$$= \int_2^x [uy - \frac{y^2}{2}]_1^2 du = \int_2^x (u - \frac{3}{2})du = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x + 1\,.$$
Allora, osservando che $P(X > x_0) + P(X \le x_0) = 3P(X \le x_0) = 1$, segue $P(X \le x_0) = F_1(x_0) = \frac{1}{3}$; quindi: $\frac{x_0^2}{2} - \frac{3x_0}{2} + 1 = \frac{1}{3}$, con $x_0 \in [2,3]$, da cui si ottiene: $x_0 = \frac{9+\sqrt{33}}{6}$.

4. Si ha $\mathbb{P}(X) = P(A) - P(B) = 0$, $\mathbb{P}(Y) = P(B) - P(C) = 0$; inoltre, ricordando che $|A||B| = |AB|$ e che $|A||A| = |A|$, si ottiene

$$XY = (|A|-|B|)(|B|-|C|) = |A||B|-|A||C|-|B||B|+|B||C| = |AB|-|AC|-|B|+|BC|\,,$$

con $\mathbb{P}(XY) = p^2-p$; pertanto $Cov(X,Y) = \mathbb{P}(XY) = p^2-p \geq -\frac{1}{4}$, corrispondente a $p = \frac{1}{2}$. Inoltre $Var(X) = Var(|A|) + Var(|B|) = Var(|B|) + Var(|C|) = Var(Y) = 2p(1-p)$; allora $\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{-p(1-p)}{2p(1-p)} = -\frac{1}{2}$, $\forall p \in (0,1)$.

5. Si ha: $f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-1)^2}{8}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(y+1)^2}{8}} dy = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}$, $f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \cdots = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(y+1)^2}{8}}$, con $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$.
Pertanto: $X \sim N_{1,2}(x), Y \sim N_{-1,2}(y)$, con X,Y stocasticamente indipendenti e con $\varphi_X(t) = e^{it-2t^2}$, $\varphi_Y(t) = e^{-it-2t^2}$; allora

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{P}(e^{itZ}) = \mathbb{P}(e^{it(X-Y)}) = \mathbb{P}(e^{itX})\mathbb{P}(e^{i(-t)Y}) = \varphi_X(t)\varphi_Y(-t) = e^{2it-4t^2}\,.$$

Quindi Z ha una distribuzione normale con parametri $m = 2, \sigma = 2\sqrt{2}$. Allora, osservando che $\Phi(1) \simeq 0.8413\,,\ \Phi(2) \simeq 0.9772$, segue

$$p = P(Z > 2+4\sqrt{2} \mid Z > 2+2\sqrt{2}) = \frac{P(Z > 2+4\sqrt{2})}{P(Z > 2+2\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{1-\Phi_{2,2\sqrt{2}}(2+4\sqrt{2})}{1-\Phi_{2,2\sqrt{2}}(2+2\sqrt{2})} = \frac{1-\Phi(2)}{1-\Phi(1)} \simeq \frac{1-0.9772}{1-0.8413} \simeq 0.1437\,.$$

6. Si ha $T = max\,\{X_1, X_2, X_3\}$; quindi $(T \leq t) = (X_1 \leq t, X_2 \leq t, X_3 \leq t)$. Allora, fissato $t > 0$, si ha: $P(T \leq t) = P(X_1 \leq t, X_2 \leq t, X_3 \leq t) = P(X_1 \leq t)P(X_2 \leq t)P(X_3 \leq t) = (1-e^{-t})(1-e^{-t})(1-e^{-t}) = (1-e^{-t})^3 = F_T(t)$. Pertanto $f_T(t) = F_T'(t) = 3e^{-t}(1-e^{-t})^2$ e, ricordando che $\int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$, segue:

$$\mu = \int_0^{+\infty} 3te^{-t}(1-e^{-t})^2 dt = 3\int_0^{+\infty} te^{-t}dt - 3\int_0^{+\infty} 2te^{-2t}dt + \int_0^{+\infty} 3te^{-3t}dt = 3 - \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}\,.$$

Infine, osservando che $S_T(t) = 1 - F_T(t) = e^{-t}(3 - 3e^{-t} + e^{-2t})$, si ha

$$h_T(t) = \frac{f_T(t)}{S_T(t)} = \frac{3e^{-t}(1-e^{-t})^2}{e^{-t}(3-3e^{-t}+e^{-2t})} = \frac{3-6e^{-t}+3e^{-2t}}{3-3e^{-t}+e^{-2t}} = \frac{3e^{2t}-6e^t+3}{3e^{2t}-3e^t+1}\,.$$

7. Si ha $X = |E_1|+|E_2|+|E_3| \in \{0,1,2\}$, $A = (X=2), B = (X=0)$; inoltre $X \sim H(6,3,\frac{1}{3})$.

$$\alpha = P(A^cB^c) = P(X \leq 1,\, X \geq 1) = P(X=1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{3}{5}\,.$$

Inoltre, osservando che $P(X=2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{4}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{5}$, segue

$$\beta = P(A \,|\, A \vee B) = P[(X=2)\,|\,(X=2) \vee (X=0)] = \frac{P(X=2)}{1-P(X=1)} = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{3}{5}} = \frac{1}{2}\,.$$

Infine, gli eventi $E_1, \ldots, E_6$ sono scambiabili, con

$$P(E_i) = P(E_1) = \frac{1}{3}\,,\ P(E_{i_1}E_{i_2}) = P(E_1E_2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{15}\,,\ P(E_{i_1}\cdots E_{i_h}) = 0\,,\ h = 3,4,5,6\,.$$