Probabilità e Statistica (14/1/2016)

(Ing. Civile - Trasporti - Elettronica, Roma; esame da 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)
(esame da 6 crediti: risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Da un gruppo di 8 studenti, dei quali 2 non sanno risolvere un certo quesito, ne vengono presi a caso 3, ad uno dei quali scelto a caso viene sottoposto il quesito. Definiti gli eventi $H_r =$ *"r dei 3 studenti non sanno risolvere il quesito"*, $r = 0, 1, 2$, $A =$ *"lo studente scelto a caso non sa risolvere il quesito"*, calcolare $P(A)$ e stabilire se H_2 ed A sono correlati.

   $P(A) =$ $\qquad$ $Correlazione?$

2. La densità di probabilità di un numero aleatorio continuo $X \in [0, 2]$ è $f(x) = x$, per $x \in [0, 1]$, $f(x) = 2 - x$, per $x \in (1, 2]$, con $f(x) = 0$ altrove. Calcolare la funzione di ripartizione $F(x)$ e i valori x_1, x_2 tali che gli eventi $(X \leq x_1), (x_1 < X \leq x_2), (X > x_2)$ sono ugualmente probabili.

   $F(x) =$ $\qquad$ $x_1 =$ $\qquad$ $x_2 =$

3. Date due urne U e V, ciascuna contenente 2 palline bianche e 1 nera, da ogni urna si tolgono a caso due palline. Sia X il numero aleatorio di palline bianche estratte da U ed Y il numero aleatorio di palline bianche estratte da V. Posto $Z = X - Y$, calcolare la previsione, la varianza e la funzione di ripartizione di Z.

   $\mathbb{P}(Z) =$ $\qquad$ $Var(Z) =$ $\qquad$ $F(z) =$

4. Due veicoli, a partire da un certo istante, si mettono in movimento con velocità aleatorie (in km/h) X e Y. La densità congiunta di (X, Y) è $f(x, y) = e^{-c(x+y)}$, con $c > 0$, per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante c; inoltre, posto $Z = X - Y$ e fissato un valore $z \geq 0$, calcolare la probabilità $p = P(Z \geq z)$ e la probabilità condizionata $\gamma = P(Z \geq z \,|\, Z \geq 0)$.

   $c =$ $\qquad$ $p =$ $\qquad$ $\gamma =$

5. Dato un numero aleatorio continuo $X \geq 0$, con densità $f(x) = 4xe^{-2x^2}$ per $x \geq 0$, con $f(x) = 0$ altrove, sia $Y = X^2$. Calcolare la previsione di X, la funzione di rischio di Y e la funzione di sopravvivenza di $T = \frac{Y}{2}$.

   $\mathbb{P}(X) =$ $\qquad$ $h_Y(y) =$ $\qquad$ $S_T(t) =$

6. L'attività di un operatore finanziario comporta due entrate aleatorie X e Y ed un'uscita aleatoria Z, con X, Y, Z stocasticamente indipendenti e con distribuzione normale, di parametri $m_X = m_Y = 5, \sigma_X = \sigma_Y = 1, m_Z = 4, \sigma_Z = 1$. Calcolare la previsione, lo scarto quadratico medio e la funzione caratteristica del guadagno complessivo $V = X + Y - Z$ (*ricordiamo che la funzione caratteristica di una distribuzione* $N_{m,\sigma}$ è $\varphi(t) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$).

   $m_V =$ $\qquad$ $\sigma_V =$ $\qquad$ $\varphi_V(t) =$

7. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio Θ è normale con parametri $m_0 = 0$, $\sigma_0 = 1$. Le componenti di un campione casuale $(X_1, \cdots, X_8)$, subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione normale con valor medio θ e scarto standard $\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Supposto di aver osservato un campione casuale $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_8)$, con $x_1 + \cdots + x_8 = 3$, calcolare il valore a tale che $P(\frac{9}{25} - 2a \leq \Theta \leq \frac{9}{25} + 2a \mid \mathbf{x}) = 2\Phi(2) - 1$.

   $a =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civile - Trasporti - Elettronica, Roma)

Soluzioni della prova scritta del 14/1/2016.

1. Si ha $P(H_r) = \frac{\binom{2}{r}\binom{6}{3-r}}{\binom{8}{3}}$, $r = 0, 1, 2$; quindi: $P(H_0) = \frac{5}{14}$, $P(H_1) = \frac{15}{28}$, $P(H_2) = \frac{3}{28}$. Inoltre $P(A|H_0) = 0\,,\;\; P(A|H_1) = \frac{1}{3}\,,\;\; P(A|H_2) = \frac{2}{3}$; pertanto

$$P(A) = \sum_{r=0}^{2} P(A|H_r)P(H_r) = 0 \cdot \frac{5}{14} + \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{28} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{28} = \frac{1}{4}\,.$$

Infine, osservando che $P(A|H_2) = \frac{2}{3} > \frac{1}{4} = P(A)$, segue che H_2 ed A sono correlati positivamente; infatti, simmetricamente, si ha

$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{28}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{7} \;>\; \frac{3}{28} = P(H_2)\,.$$

2. Si ha $F(x) = 0$, per $x \leq 0$, $F(x) = 1$, per $x \geq 2$; inoltre $F(x) = \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2}$, per $x \in (0, 1]$, $F(x) = \int_0^1 t dt + \int_1^x (2 - t)dt = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1$, per $x \in (1, 2]$. Gli eventi $(X \leq x_1)$, $(x_1 < X \leq x_2)$, $(X > x_2)$ formano una partizione ed essendo ugualmente probabili hanno tutti probabilità $\frac{1}{3}$. Osservando che $F(x_1) = \frac{1}{3}, F(1) = \frac{1}{2}, F(x_2) = \frac{2}{3}$, segue $x_1 \in (0, 1), x_2 \in (1, 2)$, con

$$P(X \leq x_1) = F(x_1) = \frac{x_1^2}{2} = \frac{1}{3} = P(X > x_2) = 1 - F(x_2) = 1 - \left(-\frac{x_2^2}{2} + 2x_2 - 1\right) = \frac{x_2^2}{2} - 2x_2 + 2\,,$$

da cui si ottiene: $x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} = 1 - \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $x_2 = 2 - \sqrt{\frac{2}{3}} = 1 + \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

3. Si ha $X \in \{1, 2\}$, $Y \in \{1, 2\}$, con X e Y stocasticamente indipendenti e con

$$P(X = 1) = P(Y = 1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{3}{2}} = \frac{2}{3}\,,\;\; P(X = 2) = P(Y = 2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{1}{0}}{\binom{3}{2}} = \frac{1}{3}\,.$$

X ed Y hanno la stessa distribuzione ipergeometrica $H(3, 2, \frac{2}{3})$, con $\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y) = \frac{4}{3}$, $Var(X) = Var(Y) = \frac{2}{9}$, $Cov(X, Y) = 0$; pertanto: $\mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}(X) - \mathbb{P}(Y) = 0$, $Var(Z) = Var(X) + Var(Y) = \frac{4}{9}$. Inoltre, $Z \in \{-1, 0, 1\}$, con

$$P(Z = -1) = P(X = 1, Y = 2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9} = P(X = 2, Y = 1) = P(Z = 1),\;\; P(Z = 0) = \frac{5}{9}\,.$$

Allora: $F(z) = 0$, per $z < -1$; $F(z) = \frac{2}{9}$, per $-1 \leq z < 0$; $F(z) = \frac{7}{9}$, per $0 \leq z < 1$; $F(z) = 1$, per $z \geq 1$.

4. Ricordando che per ogni $c > 0$ si ha $\int_0^{+\infty} ce^{-cx} dx = 1$, segue

$$\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-c(x+y)} dy = \frac{1}{c^2} \int_0^{+\infty} ce^{-cx} dx \int_0^{+\infty} ce^{-cy} dy = \frac{1}{c^2} = 1\,;$$

pertanto: $c = 1$. Inoltre, osservando che $(Z \geq z) = (Y \leq X - z) = [(X, Y) \in A]$, dove A è l'angolo contenuto nel primo quadrante di vertice il punto $(z, 0)$, delimitato dall'asse x e dalla retta $y = x - z$, si ha

$$p = P(Z \geq z) = P(Y \leq X - z) = \int\int_A f(x,y)dxdy = \int_z^{+\infty} dx \int_0^{x-z} e^{-x-y}dy =$$

$$= \int_z^{+\infty} e^{-x}[1 - e^{-(x-z)}]\, dx = \int_z^{+\infty} e^{-x}dx - \frac{e^z}{2}\int_z^{+\infty} 2e^{-2x}dx = e^{-z} - \frac{e^z}{2} \cdot e^{-2z} = \frac{e^{-z}}{2}\,.$$

Infine: $\gamma = P(Z \geq z \,|\, Z \geq 0) = \frac{P(Z\geq z, Z\geq 0)}{P(Z\geq 0)} = \frac{P(Z\geq z)}{P(Z\geq 0)} = \frac{\frac{e^{-z}}{2}}{\frac{1}{2}} = e^{-z}$.

5. Osserviamo che, se $Z \sim N_{0,\frac{1}{2}}$, allora $\mathbb{P}(Z) = 0$, $Var(Z) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(Z^2)$; inoltre

$$\mathbb{P}(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-2z^2}dz = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} z^2e^{-2z^2}dz = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} 4z^2e^{-2z^2}dz = \frac{1}{4}\,;$$

pertanto: $\int_0^{+\infty} 4z^2e^{-2z^2}dz = \int_0^{+\infty} 4x^2e^{-2x^2}dx = \mathbb{P}(X) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$. Inoltre, per ogni fissato $y \geq 0$, si ha

$$S_Y(y) = P(Y > y) = P(X > \sqrt{y}) = \int_{\sqrt{y}}^{+\infty} 4xe^{-2x^2}dx = [-e^{-2x^2}]_{\sqrt{y}}^{+\infty} = e^{-2y}\,;$$

allora Y ha una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 2$. Pertanto: $h_Y(y) = 2$ per $y \geq 0$, con $h_Y(y) = 0$ altrove. Infine, per ogni fissato $t \geq 0$, si ha

$$S_T(t) = P(T > t) = P(Y > 2t) = S_Y(2t) = e^{-4t}\,; \quad (T \sim Exp(4))\,.$$

6. Si ha: $\mathbb{P}(V) = m_V = \mathbb{P}(X + Y - Z) = \mathbb{P}(X) + \mathbb{P}(Y) - \mathbb{P}(Z) = m_X + m_Y - m_Z = 6$; inoltre $Cov(X, Y) = Cov(X, Z) = Cov(Y, Z) = 0$, da cui segue

$$Var(V) = Var(X + Y - Z) = Var(X) + Var(Y) + Var(Z) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + \sigma_Z^2 = 3\,;$$

pertanto: $\sigma_V = \sqrt{3}$. Infine, sfruttando l'indipendenza stocastica di X, Y, Z, si ha

$$\varphi_V(t) = \mathbb{P}(e^{itV}) = \mathbb{P}(e^{it(X+Y-Z)}) = \mathbb{P}(e^{itX})\mathbb{P}(e^{itY})\mathbb{P}(e^{-itZ}) =$$

$$= \varphi_X(t)\varphi_Y(t)\varphi_Z(-t) = e^{5it-\frac{t^2}{2}}\, e^{5it-\frac{t^2}{2}}\, e^{-4it-\frac{t^2}{2}} = e^{6it-\frac{3t^2}{2}}\,; \quad (V \sim N_{6,\sqrt{3}})\,.$$

7. Si ha $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{m_8,\sigma_8}$, con $\overline{x} = \frac{3}{8}$, $m_8 = \frac{\frac{1}{\sigma_0^2}\cdot m_0 + \frac{n}{\sigma^2}\cdot\overline{x}}{\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{n}{\sigma^2}} = \frac{9}{25}$; $\frac{1}{\sigma_8^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2} = 25$, $\sigma_8 = \frac{1}{5}$; ovvero $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{\frac{9}{25},\frac{1}{5}}$. Pertanto

$$P\left(\frac{9}{25} - 2a \leq \Theta \leq \frac{9}{25} + 2a \mid \mathbf{x}\right) = \Phi_{\frac{9}{25},\frac{1}{5}}\left(\frac{9}{25} + 2a\right) - \Phi_{\frac{9}{25},\frac{1}{5}}\left(\frac{9}{25} - 2a\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\frac{9}{25} + 2a - \frac{9}{25}}{\frac{1}{5}}\right) - \Phi\left(\frac{\frac{9}{25} - 2a - \frac{9}{25}}{\frac{1}{5}}\right) = \Phi(10a) - \Phi(-10a) = 2\Phi(10a) - 1\,.$$

Allora, (ricordando che Φ è una funzione crescente) si ha

$$2\Phi(10a) - 1 \;=\; 2\Phi(2) - 1 \iff \Phi(10a) = \Phi(2) \iff 10a = 2 \iff a = \sigma_8 = \frac{1}{5}\,.$$