Probabilità e Statistica (1/4/2016)

(Ing. Civile - Trasporti - Elettronica, Roma; esame da 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)

(esame da 6 crediti: risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Da due urne U e V, contenenti 4 palline bianche e 4 nere, si tolgono a caso 4 palline; successivamente, le palline estratte da ciascuna urna vengono inserite nell'altra. Siano Z e W i numeri aleatori di palline bianche in U e V, al termine dell'esperimento. Calcolare la covarianza e il coefficiente di correlazione di Z, W. (*indicare con X ed Y i numeri aleatori di palline bianche estratte da U e V, inserite poi in V e U*).

   $Cov(Z, W) =$ $\qquad\qquad$ $\rho_{ZW} =$

2. Il tempo aleatorio X impiegato da una persona per completare un lavoro ha una densità $f(x) = cx^2 + x$, per $x \in [0, 1]$ e zero altrove. Calcolare il valore della costante c, la funzione di ripartizione $F(x)$ e la varianza σ^2.

   $c =$ $\qquad\qquad$ $F(x) = \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$ $\qquad\qquad$ $\sigma^2 =$

3. Dati 2 numeri aleatori X e Y, stocasticamente indipendenti e con distribuzione normale $N_{1,1}$, sia $Z = X - Y$. Calcolare $Cov(X - Z, Y + Z)$ e $p = P(Z > 2\sqrt{2} \,|\, Z > -\sqrt{2})$.

   $Cov(X-Z, Y+Z) =$ $\qquad\qquad$ $p =$

4. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y), con $X \geq 0,\ Y \geq 2X$, è $f(x, y) = aye^{-x-y}$, per $x \geq 0, y \geq 2x$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante a e le densità marginali $f_1(x)$, per $x > 0$, ed $f_2(y)$, per $y > 0$.

   $a =$ $\qquad\qquad$ $f_1(x) =$ $\qquad\qquad$ $f_2(y) =$

5. La funzione di rischio di un numero aleatorio non negativo X è $h(x) = 4x$, per $x \geq 0$, con $h(x) = 0$ altrove. Calcolare la funzione di ripartizione $F(x)$ e la previsione di X.

   $F(x) =$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{P}(X) =$

6. Da un'urna contenente sei palline, tre delle quali numerate con il numero 2 e tre con il numero -2, si effettuano due estrazioni senza restituzione ottenendo dei risultati aleatori X e Y. Calcolare la funzione caratteristica e la funzione di ripartizione del numero aleatorio $Z = X + Y$.

   $\varphi_Z(t) =$ $\qquad\qquad$ $F_Z(z) =$

7. Una macchina produce pezzi in serie, ognuno dei quali è difettoso con probabilità $\frac{1}{5}$. Considerati gli eventi $E_i =$ *"l'i-mo pezzo è difettoso"*, $i = 1, 2, \ldots$, (giudicati stocasticamente indipendenti), e posto $A = E_1E_2E_3$ e $B = E_1 \vee E_2 \vee E_3$, calcolare la probabilità $\alpha = P(A|B)$. Sia inoltre X il numero aleatorio di pezzi difettosi tra i primi 3 prodotti dalla macchina. Calcolare la probabilità condizionata $\beta = P(X > 0 \,|\, X < 3)$.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad$ $\beta =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civile - Trasporti - Elettronica, Roma)

Soluzioni della prova scritta dell'1/4/2016.

1. Si ha $Z = 4-X+Y$, $W = 4+X-Y$, con X, Y stocasticamente indipendenti e ugualmente distribuiti, con $X \sim H(8, 4, \frac{1}{2})$, $Y \sim H(8, 4, \frac{1}{2})$, $\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y) = np = 2$, $Var(X) = Var(Y) = npq(1 - \frac{n-1}{N-1}) = \frac{4}{7}$, $Cov(X, Y) = 0$; allora

$$Cov(Z, W) = Cov(4-X+Y, 4+X-Y) = Cov(-X+Y, X-Y) = -Cov(X-Y, X-Y) =$$

$$= -Var(X-Y) = -Var(X) - Var(Y) + 2Cov(X, Y) = -2Var(X) = -\frac{8}{7}\,.$$

Infine, osservando che $Z+W = 4-X+Y+4+X-Y = 8$, ovvero $Z = -W+8$ (*relazione lineare del tipo* $Z = aW + b$, *con* $a < 0$), segue: $\rho_{ZW} = -1$.

2. Si ha: $\int_0^1 (cx^2 + x)dx = \left[\frac{cx^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{c}{3} + \frac{1}{2} = 1$; pertanto: $c = \frac{3}{2}$. Allora, per ogni $x \in (0, 1)$, si ha: $F(x) = \int_0^x (\frac{3}{2}t^2 + t)dt = \frac{x^3+x^2}{2}$; inoltre: $F(x) = 0$, per $x \leq 0$; $F(x) = 1$, per $x \geq 1$. Infine

$$\mathbb{P}(X) = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 (\frac{3}{2}x^3 + x^2)dx = \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{3}\right) = \frac{17}{24}\,;$$

$$\mathbb{P}(X^2) = \int_0^1 x^2 f(x)dx = \int_0^1 (\frac{3}{2}x^4 + x^3)dx = \left(\frac{3}{10} + \frac{1}{4}\right) = \frac{11}{20}\,;$$

allora: $\sigma^2 = \frac{11}{20} - \frac{289}{576} = \cdots = \frac{139}{2880}$.

3. Si ha $X-Z = Y$, $Y+Z = X$, $Cov(X-Z, Y+Z) = Cov(Y, X) = Cov(X, Y) = 0$. Inoltre, ricordando che la funzione caratteristica di una distribuzione $N_{m,\sigma}$ è $\varphi(t) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$, si ha

$$\varphi_X(t) = \varphi_Y(t) = e^{it - \frac{t^2}{2}}\,, \quad \varphi_Z(t) = \varphi_X(t)\varphi_{-Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(-t) = e^{it-\frac{t^2}{2}}e^{-it-\frac{t^2}{2}} = e^{-t^2}\,;$$

pertanto: $Z \sim N_{0,\sqrt{2}}$. Allora, osservando che $\frac{Z}{\sqrt{2}} \sim N_{0,1}$, segue

$$p = P(Z > 2\sqrt{2}\,|\,Z > -\sqrt{2}) = \frac{P(Z > 2\sqrt{2})}{P(Z > -\sqrt{2})} = \frac{1 - P(Z \leq 2\sqrt{2})}{1 - P(Z \leq -\sqrt{2})} = \frac{1 - P(\frac{Z}{\sqrt{2}} \leq 2)}{1 - P(\frac{Z}{\sqrt{2}} \leq -1)}$$

$$= \frac{1 - \Phi(2)}{1 - \Phi(-1)} = \frac{1 - \Phi(2)}{\Phi(1)} \simeq \frac{1 - 0.9772}{0.8413} \simeq 0.0271\,.$$

4. Fissato $x > 0$, tenendo conto che $\int_{2x}^{+\infty} ye^{-y}dy = [-ye^{-y}]_{2x}^{+\infty} + \int_{2x}^{+\infty} e^{-y}dy = 2xe^{-2x} + e^{-2x}$, si ha:

$$f_1(x) = \int_{2x}^{+\infty} aye^{-x-y}dy = ae^{-x}\int_{2x}^{+\infty} ye^{-y}dy = ae^{-x}(2xe^{-2x} + e^{-2x}) = 2axe^{-3x} + ae^{-3x}\,,$$

con

$$\int_0^{+\infty} f_1(x)dx = 2a\int_0^{+\infty} xe^{-3x}dx + a\int_0^{+\infty} e^{-3x}dx = \cdots = \frac{2a}{9} + \frac{a}{3} = \frac{5}{9}a = 1\,;$$

pertanto $a = \frac{9}{5}$, da cui segue: $f_1(x) = \frac{18}{5}xe^{-3x} + \frac{9}{5}e^{-3x}$. Inoltre, fissato $y > 0$, si ha

$$f_2(y) = \int_0^{\frac{y}{2}} \frac{9}{5}ye^{-x-y}dx = \frac{9}{5}ye^{-y}\int_0^{\frac{y}{2}} e^{-x}dx = \frac{9}{5}ye^{-y}(1-e^{-\frac{y}{2}}) = \frac{9}{5}ye^{-y} - \frac{9}{5}ye^{-\frac{3}{2}y}\,.$$

5. Per ogni fissato $x > 0$, si ha: $S(x) = P(X > x) = e^{-\int_0^x h(t)dt} = e^{-\int_0^x 4tdt} = e^{-2x^2}$, con $S(x) = 1$, per $x \leq 0$. Allora: $F(x) = 0$, per $x \leq 0$; inoltre $F(x) = 1 - S(x) = 1 - e^{-2x^2}$, per $x > 0$; pertanto $f(x) = 4xe^{-2x^2}$, per $x > 0$, con $f(x) = 0$ altrove. Infine, tenendo conto che per un numero aleatorio Z con distribuzione $N_{0,\frac{1}{2}}$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2\cdot\frac{1}{4}}}dz = \int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}z^2e^{-2z^2}dz = \mathbb{P}(Z^2) = Var(Z) = \frac{1}{4}\,,$$

e quindi $\int_{-\infty}^{+\infty} z^2e^{-2z^2}dz = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, si ottiene

$$\mathbb{P}(X) = \int_0^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} 4x^2e^{-2x^2}dx = 2\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-2x^2}dx = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\,.$$

6. Si ha $(X,Y) \in \{(-2,-2),(-2,2),(2,-2),(2,2)\}$, $Z \in \{-4,0,4\}$, con

$$(Z=-4) = (X=-2,Y=-2)\,,\quad (Z=4) = (X=2,Y=2)\,,\quad (Z=0) = (X \neq Y)\,,$$

$$P(Z=-4) = P(X=-2,Y=-2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{1}{5} = P(X=2,Y=2) = P(Z=4)\,,$$

$$P(Z=0) = P(X=-2,Y=2) + P(X=2,Y=-2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10} = \frac{3}{5}\,.$$

Pertanto

$$\varphi_Z(t) = \sum_h p_he^{ith} = \frac{1}{5}\,e^{-4it} + \frac{3}{5} + \frac{1}{5}\,e^{4it} = \frac{3+2cos\,4t}{5}\,.$$

Inoltre: $F_Z(z) = 0$, per $z < -4$; $F_Z(z) = \frac{1}{5}$, per $-4 \leq z < 0$; $F_Z(z) = \frac{4}{5}$, per $0 \leq z < 4$; $F_Z(z) = 1$, per $z \geq 4$.

7. Tenendo conto che $E_1E_2E_3 \wedge (E_1 \vee E_2 \vee E_3) = E_1E_2E_3$ e che $(E_1 \vee E_2 \vee E_3)^c = E_1^cE_2^cE_3^c$, si ha

$$\alpha = P(A|B) = P(E_1E_2E_3\,|\,E_1 \vee E_2 \vee E_3) = \frac{P(E_1E_2E_3)}{P(E_1 \vee E_2 \vee E_3)} = \frac{P(E_1E_2E_3)}{1-P(E_1^cE_2^cE_3^c)} =$$

$$= \frac{P(E_1)P(E_2)P(E_3)}{1-P(E_1^c)P(E_2^c)P(E_3^c)} = \frac{\frac{1}{125}}{1-\frac{64}{125}} = \frac{1}{61}\,.$$

Inoltre, $X \sim B(3,\frac{1}{5})$, con $X \in \{0,1,2,3\}$ e con $P(X=h) = \binom{3}{h}\left(\frac{1}{5}\right)^h\left(\frac{4}{5}\right)^{3-h}$, $h = 0,1,2,3$. Allora

$$\beta = P(X > 0\,|\,X < 3) = \frac{P(0 < X < 3)}{P(X < 3)} = \frac{P(X=1)+P(X=2)}{1-P(X=3)} = \frac{\frac{48}{125}+\frac{12}{125}}{1-\frac{1}{125}} = \frac{15}{31}\,.$$