Probabilità e Statistica (16/01/2017)

(Ing. Civ. - Trasp. - Amb. Terr. - Elettr., Roma; esame da 3 o 4 crediti: esercizi 1,2,3,4)
(esame da 6 crediti: risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Da un'urna U, contenente 4 palline bianche e 4 nere, si estraggono in blocco n palline, con $n < 4$, delle quali un numero aleatorio X sono bianche. Calcolare: (i) per quale valore di n la varianza di X è uguale a $\frac{3}{7}$; (ii) la probabilità condizionata α che fra le n palline almeno una sia bianca, supposto che al massimo una sia bianca, verificando che $\alpha = \frac{6}{7}$ per $n = 3$.

   $n =$ $\qquad\qquad$ $\alpha =$

2. La densità di probabilità di un numero aleatorio continuo $X \in [1, 4]$ è $f(x) = a$, per $x \in [1, 2] \cup [3, 4]$, $f(x) = \frac{1}{2}$, per $x \in (2, 3)$, con $f(x) = 0$ altrove. Calcolare la costante a, la previsione m di X e i valori x tali che $F(x) > \frac{3}{4}$.

   $a =$ $\qquad\qquad$ $m =$ $\qquad\qquad$ $x \in$

3. Dato un vettore aleatorio continuo (X, Y), con densità $f(x, y) = e^{-x-y}$ per $x \geq 0, y \geq 0$, e con $f(x, y) = 0$ altrove, stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti. Inoltre, posto $Z = X - Y$, calcolare σ^2_Z e, fissato $z > 0$, la probabilità $p = P(Z \leq z)$.

   Indipendenza ? $\qquad\qquad$ $\sigma^2_Z =$ $\qquad\qquad$ $p =$

4. Dato un vettore aleatorio discreto $(X, Y) \in \{(-2, -3), (-2, 3), (0, -1), (0, 1), (2, -3), (2, 3)\}$, con $P(X = 0, Y = -1) = P(X = 0, Y = 1) = a$ e con gli altri punti ugualmente probabili fra di loro, calcolare i valori che si possono assegnare ad a. Inoltre, calcolare il coefficiente di correlazione tra X e Y e stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti.

   $a \in$ $\qquad\qquad$ $\rho =$ $\qquad\qquad$ *Indipendenza ?*

5. Con riferimento all'esercizio precedente, assumendo $a = \frac{1}{4}$, calcolare la funzione caratteristica e la varianza del numero aleatorio $Z = Y - X$.

   $\varphi_Z(t) =$ $\qquad\qquad$ $\sigma^2_Z =$

6. Con riferimento all'esercizio 3, calcolare la funzione di sopravvivenza e la funzione di rischio del numero aleatorio $T = 4Y$.

   $S_T(t) =$ $\qquad\qquad$ $h_T(t) =$

7. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio Θ è normale con parametri $m_0 = 0$, $\sigma_0 = 2$. Le componenti di un campione casuale $(X_1, \ldots, X_6)$, subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione normale con valor medio θ e scarto standard $\sigma = 1$. Supposto di aver osservato un campione casuale $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_6)$, con $x_1 + \cdots + x_6 = 5$, calcolare (utilizzando la distribuzione finale di Θ) la probabilità p dell'evento condizionato $(\Theta \leq \frac{6}{5} \,|\, \Theta \leq \frac{8}{5}; \mathbf{x})$.

   $p =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civ. - Trasp. - Amb. Terr. - Elettr., Roma)
Soluzioni della prova scritta del 16/01/2017.

1. Si ha $X \sim H(8, n, \frac{1}{2})$, con $Var(X) = \frac{n}{4}(1 - \frac{n-1}{7}) = \frac{n(8-n)}{28} = \frac{3}{7}$ per $n = 2$. Inoltre

$$\alpha = P(X \geq 1 | X \leq 1) = \frac{P(X \geq 1, X \leq 1)}{P(X \leq 1)} = \frac{P(X = 1)}{P(X = 0) + P(X = 1)} = \frac{\frac{\binom{4}{1}\binom{4}{n-1}}{\binom{8}{n}}}{\frac{\binom{4}{0}\binom{4}{n}}{\binom{8}{n}} + \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{n-1}}{\binom{8}{n}}} =$$

$= \frac{4\binom{4}{n-1}}{\binom{4}{n}+4\binom{4}{n-1}} = \frac{4n}{3n+5}$, con $\alpha = \frac{1}{2}$, per $n = 1$; $\alpha = \frac{8}{11}$, per $n = 2$; $\alpha = \frac{6}{7}$, per $n = 3$.

2. Si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_1^2 a dx + \int_2^3 \frac{1}{2} dx + \int_3^4 a dx = 2a + \frac{1}{2} = 1\,;$$

pertanto: $a = \frac{1}{4}$. Inoltre

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_1^2 \frac{1}{4} x dx + \int_2^3 \frac{1}{2} x dx + \int_3^4 \frac{1}{4} x dx = \frac{5}{2}\,,$$

come seguirebbe immediatamente osservando che $f(x)$ ha un diagramma simmetrico rispetto alla retta di equazione $x = \frac{5}{2}$. Infine, per $x \in (3, 4)$, si ha

$$F(x) = \int_1^2 \frac{1}{4} dx + \int_2^3 \frac{1}{2} dx + \int_3^x \frac{1}{4} dt = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x-3) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}(x-3) > \frac{3}{4}\,,$$

con $F(3) = \frac{3}{4}$ e con $F(x) = 1$ per $x \geq 4$; pertanto: $F(x) > \frac{3}{4}$ per $x > 3$.

3. Si ha $f_1(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x-y} dy = \cdots = e^{-x}$, $x \geq 0$; $f_2(y) = \cdots = e^{-y}$, $y \geq 0$. Pertanto X e Y hanno una distribuzione esponenziale di parametri $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, con $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$ per ogni (x, y); quindi X e Y sono stocasticamente indipendenti. Allora $Cov(X, Y) = 0$ e si ha: $\sigma_Z^2 = Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} = 2$. Infine, fissato $z > 0$, si ha $p = P(Z \leq z) = P(X - Y \leq z) = 1 - P(X - Y > z)$, con

$$P(X - Y > z) = P(Y < X - z) = \int_z^{+\infty} \big(\int_0^{x-z} e^{-x} e^{-y} dy \big) dx =$$

$$= \int_z^{+\infty} e^{-x} \left(\int_0^{x-z} e^{-y} dy \right) dx = \int_z^{+\infty} e^{-x} (1 - e^{-(x-z)}) dx =$$

$$= \int_z^{+\infty} e^{-x} dx - \tfrac{1}{2} e^z \int_z^{+\infty} 2e^{-2x} dx = e^{-z} - \tfrac{1}{2} e^z e^{-2z} = \tfrac{1}{2}\, e^{-z}.$$

Pertanto: $p = 1 - \frac{1}{2}\, e^{-z}$.

4. Si ha $0 \leq P(X = 0, Y = -1) + P(X = 0, Y = 1) = 2a \leq 1$; pertanto $a \in [0, \frac{1}{2}]$, con $P(X = x, Y = y) = \frac{1-2a}{4}$ per ogni $(x, y) \in \{(-2, -3), (-2, 3), (2, -3), (2, 3)\}$. Inoltre $X \in \{-2, 0, 2\}$, $Y \in \{-3, -1, 1, 3\}$, $XY \in \{-6, 0, 6\}$, con

$$P(X = -2) = P(X = 2) = \frac{1 - 2a}{2}\,,\ P(X = 0) = 2a\,,$$

$$P(Y=-3)=P(Y=3)=\frac{1-2a}{2}\,,\ P(Y=-1)=P(Y=1)=a\,,$$

$$P(XY=-6)=P(XY=6)=\frac{1-2a}{2}\,,\ P(XY=0)=2a\,,$$

Allora: $\mathbb{P}(X)=\mathbb{P}(Y)=\mathbb{P}(XY)=0$; pertanto: $Cov(X,Y)=\rho=0$. Infine, osservando ad esempio che

$$a=P(X=0,Y=1)\ \neq\ P(X=0)P(Y=1)=2a\cdot a=2a^2\,,$$

segue che X e Y non sono stocasticamente indipendenti.

5. Si ha $Z\in\{-5,-1,1,5\}$, con $P(Z=-5)=P(Z=5)=\frac{1}{8}$, $P(Z=-1)=P(Z=1)=\frac{3}{8}$; pertanto, ricordando che

$$e^{it}=cos(t)+i\,sen(t)\,,\ e^{-it}=cos(t)-i\,sen(t)\,,\ e^{5it}=cos(5t)+i\,sen(5t)\,,\ e^{-5it}=cos(5t)-i\,sen(5t)\,,$$

segue

$$\varphi_Z(t)=\mathbb{P}(e^{itZ})=\frac{1}{8}(e^{-5it}+3e^{-it}+3e^{it}+e^{5it})=\frac{3cos(t)+cos(5t)}{4}\,,$$

con $\varphi'_Z(t)=-\frac{1}{4}[3sen(t)+5sen(5t)]$, $\varphi''_Z(t)=-\frac{1}{4}[3cos(t)+25cos(5t)]$. Allora

$$\mathbb{P}(Z)=\frac{\varphi'_Z(0)}{i}=\frac{0}{i}=0\,,\quad \mathbb{P}(Z^2)=\frac{\varphi''_Z(0)}{i^2}=\frac{-7}{-1}=7\,,\quad \sigma_Z^2=\mathbb{P}(Z^2)-[\mathbb{P}(Z)]^2=7\,.$$

In alternativa:

$$\mathbb{P}(Z)=\frac{1}{8}\cdot(-5)+\frac{3}{8}\cdot(-1)+\frac{3}{8}\cdot 1+\frac{1}{8}\cdot 5=0\,;\ \sigma_Z^2=\mathbb{P}(Z^2)=\frac{1}{8}\cdot 25+\frac{3}{8}\cdot 1+\frac{3}{8}\cdot 1+\frac{1}{8}\cdot 25=7\,.$$

6. Si ha $T=4Y\geq 0$, con $f_2(y)=e^{-y}$, $y\geq 0$, con $f_2(y)=0$ altrove; allora, fissato $t\geq 0$, segue

$$S_T(t)=P(T>t)=P(4Y>t)=P\left(Y>\frac{t}{4}\right)=\int_{\frac{t}{4}}^{+\infty}e^{-y}dy=e^{-\frac{t}{4}}\,,$$

con $S_T(t)=1$ per $t<0$. Allora $f_T(t)=-S'_T(t)=\frac{1}{4}e^{-\frac{t}{4}}$ per $t\geq 0$, con $f_T(t)=0$ per $t<0$ (T ha una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda=\frac{1}{4}$); pertanto

$$h_T(t)=\frac{f_T(t)}{S_T(t)}=\frac{\frac{1}{4}\,e^{-\frac{t}{4}}}{e^{-\frac{t}{4}}}=\frac{1}{4}\,,\ t\geq 0\,,$$

con $h_T(t)=0$ per $t<0$.

7. Si ha $\Theta\mid\mathbf{x}\sim N_{m_6,\sigma_6}$, con $\frac{1}{\sigma_6^2}=\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{6}{\sigma^2}=\frac{1}{4}+6=\frac{25}{4}$, e quindi $\sigma_6=\frac{2}{5}$, e con $m_6=\frac{\frac{1}{\sigma_0^2}\cdot m_0+\frac{6}{\sigma^2}\cdot\overline{x}}{\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{6}{\sigma^2}}=\frac{5}{\frac{25}{4}}=\frac{4}{5}$. Pertanto, per la distribuzione finale risulta $\Theta\mid\mathbf{x}\sim N_{\frac{4}{5},\frac{2}{5}}$. Allora

$$p=P\left(\Theta\leq\frac{6}{5}\mid\Theta\leq\frac{8}{5};\,\mathbf{x}\right)=\frac{P(\Theta\leq\frac{6}{5}\,|\,\mathbf{x})}{P(\Theta\leq\frac{8}{5}\,|\,\mathbf{x})}=\frac{\Phi_{\frac{4}{5},\frac{2}{5}}(\frac{6}{5})}{\Phi_{\frac{4}{5},\frac{2}{5}}(\frac{8}{5})}=\frac{\Phi(1)}{\Phi(2)}\simeq\frac{0.8413}{0.9772}\simeq 0.8609\,.$$