ESERCIZI PER IL CORSO DI ANALISI MATEMATICA I - CANALE A-L - 2015/16

Foglio 1

Teoria degli insiemi e insiemi numerici. .

Esercizio 1 Siano

$$A := \{n^2 \in \mathbb{N} \mid n \leq 3\}, \quad B := \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$C := \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad D := \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 7\}.$$

Calcolare $A \cup B \cup C \cup D$, $A \cap D$, $B \cup C$.

Esercizio 2 Siano $A := \{0, 1\}, B := \{c, d\}$. Calcolare $A \times B$, $B \times A$ e A^3

Esercizio 3 Dimostrare la seconda formula di de Morgan $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Esercizio 4 Dimostrare le inclusioni strette $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

Intervalli e valore assoluto. .

Esercizio 5 Scrivere sotto forma di intervallo o unione di intervalli i seguenti insiemi (ricorda: il logaritmo è definito solo se il suo argomento è positivo)

(1) $([3, 5] \cap (4, 9))^c$
(2) $([3, 5] \cap \mathbb{N}) \cup (-4, 1))^c$
(3) $\{x \in \mathbb{R} \mid ln(x^2 - 7x + 12) < ln(x - 4)\}$
(4) $\{x \in \mathbb{R} \mid \log_{1/2}(8 - 2x^2) \geq -1\}$
(5) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < 9^{3-2x}\}$
(6) $\{x \in \mathbb{R} \mid e^{x^3+1} < 1\}$
(7) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x + 2| \leq 3\}$
(8) $\{x \in \mathbb{R} \mid |\log x| < 1\}$
(9) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x^2 - 2x - 1| < |x + 2|\}$
(10) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x^3 - 1| < 1\}$
(11) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) < 1/2\}$
(12) $\{x \in \mathbb{R} \mid \tan(x) \geq 1\}$
(13) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) + \cos(x) \geq 1\}$

Esercizio 6 Dimostrare che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < a\} \subset \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < b\}$$

se e solo se $a < b$.

Principio di induzione.

Esercizio 7 Usando il principio di induzione, dimostrare le seguenti proposizioni

(1) Per ogni numero naturale $n \geq 3$ vale $n^2 > 2n + 1$
(2) Per ogni numero naturale $n \geq 5$vale $2^n > n^2$ (esercizio proposto a lezione)
(3) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $n^2 + 1 \geq 2n$ (esercizio proposto a lezione)
(4) Diseguaglianza di Bernoulli: per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $x > -1$ vale $(1 + x)^n \geq 1 + nx$
(5) Per ogni numero naturale $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2$$

(6) Per ogni numero naturale $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}$$

(7) Per ogni numero naturale $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{k(k + 1)}{2}$$

(8) Per ogni numero naturale $n \geq 2$ l'intersezione di n intervalli aperti è un intervallo aperto o l'insieme vuoto.

Soluzioni di alcuni esercizi del Foglio 1

Principio di induzione.

Esercizio 7 -(1) Usando il principio di induzione, dimostrare che per ogni numero naturale $n \geq 3$ vale $n^2 > 2n + 1$.

Soluzione. Innanzitutto verifichiamo la base dell'induzione osservando che se $n = 3$ allora $n^2 > 2n + 1$, infatti sostituendo abbiamo $9 > 7$.

Assumiamo ora l'ipotesi induttiva, cioè che per qualche $n \geq 3$

$$n^2 > 2n + 1 \tag{1}$$

e dimostriamo il passo induttivo, cioè che

$$(n + 1)^2 > 2(n + 1) + 1. \tag{2}$$

Osserviamo che la diseguaglianza (2) è verificata, infatti

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 > (2n + 1) + 2n + 1 = 4n + 2 > 2(n + 1) + 1$$

In particolare, la diseguaglianza $n^2 + 2n + 1 > (2n + 1) + 2n + 1$ segue dall'ipotesi induttiva (1) mentre la diseguaglianza $4n + 2 > 2(n + 1) + 1$ segue da

$$4n + 2 > 2(n + 1) + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 4n + 2 > 2n + 3 \quad \Longleftrightarrow \quad n > \frac{1}{2}.$$

Avendo dimostrato sia base induttiva che passo induttivo, la tesi segue dal principio di induzione. □

Esercizio 7 -(2) Usando il principio di induzione, dimostrare che per ogni numero naturale $n \geq 5$ vale $2^n > n^2$.

Soluzione. Innanzitutto verifichiamo la base dell'induzione osservando che se $n = 5$ allora $2^n > n^2$, infatti sostituendo abbiamo $32 > 25$.

Assumiamo ora l'ipotesi induttiva, cioè che per qualche $n \geq 5$

$$2^n > n^2 \tag{3}$$

e dimostriamo il passo induttivo, cioè che

$$2^{n+1} > (n + 1)^2 \tag{4}$$

Osserviamo che la diseguaglianza (4) è verificata, infatti

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^2 > (n + 1)^2$$

In particolare, la diseguaglianza $2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^2$ segue dall'ipotesi induttiva (3) mentre la diseguaglianza $2 \cdot n^2 > (n + 1)^2$ segue da

$$\begin{aligned} 2 \cdot n^2 > (n + 1)^2 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2n^2 > n^2 + 2n + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad n^2 - 2n - 1 > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad n > 1 + \sqrt{2} \ \vee \ n > 1 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

e dal fatto che abbiamo assunto $n \geq 5 > 1 + \sqrt{2}$.

Avendo dimostrato sia base induttiva che passo induttivo, la tesi segue dal principio di induzione. □

Esercizio 7 -(3) Usando il principio di induzione, dimostrare che per ogni numero naturale $n \geq 1$ vale $n^2 + 1 \geq 2n$.

Soluzione. Innanzitutto verifichiamo la base dell'induzione osservando che se $n = 0$ allora $n^2 + 1 \geq 2n$, infatti sostituendo abbiamo $1 > 0$.

Assumiamo ora l'ipotesi induttiva, cioè che per qualche $n \geq 0$

$$n^2 + 1 \geq 2n \tag{5}$$

e dimostriamo il passo induttivo, cioè che

$$(n+1)^2 + 1 \geq 2(n+1). \tag{6}$$

Applicando l'ipotesi induttiva abbiamo

$$(n+1)^2 + 1 = n^2 + 1 + 2n + 1 \geq 2n + 2n + 1 = 4n + 1$$

e, se $n \geq 1$, abbiamo anche $4n + 1 \geq 2(n+1)$ e possiamo concludere

$$(n+1)^2 + 1 = n^2 + 1 + 2n + 1 \geq 2n + 2n + 1 = 4n + 1 \geq 2(n+1)$$

Quindi il passo induttivo (cioè (6)) è dimostrato quando $n \geq 1$. Resta da discutere il caso $n = 0$, perchè in questo caso la disequazione $4n + 1 \geq 2(n+1)$ non è vera. Ma possiamo completare comunque la dimostrazione sostituendo 0 al posto di n in (6): abbiamo $2 = 2$ e quindi (6) vale anche quando $n = 0$. Questo conclude la dimostrazione del passo induttivo.

Avendo dimostrato sia base induttiva che passo induttivo, la tesi segue dal principio di induzione. □

Esercizio 7 -(4) Usando il principio di induzione, dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $x > -1$ vale $(1+x)^n \geq 1 + nx$

Soluzione. Fissiamo $x \in \mathbb{R}, x > -1$. Innanzitutto verifichiamo la base dell'induzione osservando che se $n = 0$ allora $(1+x)^n \geq 1 + nx$, infatti sostituendo abbiamo $(1+x)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot x$.

Assumiamo ora l'ipotesi induttiva, cioè che per qualche $n \geq 0$

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \tag{7}$$

e dimostriamo il passo induttivo, cioè che

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x \tag{8}$$

Applicando l'ipotesi induttiva (e il fatto che $x > -1$ e quindi $1 + x > 0$) abbiamo

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1 + nx + x + nx^2 \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x\end{aligned}$$

(l'ultima disequazione segue dal fatto che $nx^2 \geq 0$ per ogni $n \geq 0$ e ogni $x \in \mathbb{R}$). Questo conclude la dimostrazione del passo induttivo.

Avendo dimostrato sia base induttiva che passo induttivo, la tesi segue dal principio di induzione. □

Esercizio 7 -(5) Usando il principio di induzione, dimostrare che per ogni numero naturale $n \geq 1$ vale

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

Soluzione. Innanzitutto verifichiamo la base dell'induzione osservando che se $n = 1$ allora

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = \sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2 = n^2.$$

Assumiamo ora l'ipotesi induttiva, cioè che per qualche $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2. \tag{9}$$

e dimostriamo il passo induttivo, cioè che

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2. \tag{10}$$

Applicando l'ipotesi induttiva (e spezzando la sommatoria nei primi n termini più l'$n+1$mo) abbiamo

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2(n+1) - 1 = (n+1)^2.$$

e questo dimostra (10).

Avendo dimostrato sia base induttiva che passo induttivo, la tesi segue dal principio di induzione. □

Esercizio 7 -(6) Usando il principio di induzione, dimostrare che per ogni numero naturale $n \geq 1$ vale

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Soluzione. Innanzitutto verifichiamo la base dell'induzione osservando che se $n = 1$ allora

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}.$$

Assumiamo ora l'ipotesi induttiva, cioè che per qualche $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \tag{11}$$

e dimostriamo il passo induttivo, cioè che

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \tag{12}$$

Applicando l'ipotesi induttiva (e spezzando la sommatoria nei primi n termini più l'$n+1$mo) abbiamo

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 =$$
$$= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

e questo dimostra (12).

Avendo dimostrato sia base induttiva che passo induttivo, la tesi segue dal principio di induzione. □

Esercizio 7 -(7) Usando il principio di induzione, dimostrare che per ogni numero naturale $n \geq 1$ vale

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Soluzione. Innanzitutto verifichiamo la base dell'induzione osservando che se $n=1$ allora

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

Assumiamo ora l'ipotesi induttiva, cioè che per qualche $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{13}$$

e dimostriamo il passo induttivo, cioè che

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \tag{14}$$

Applicando l'ipotesi induttiva (e spezzando la sommatoria nei primi n termini più l'$n+1$mo) abbiamo

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$$
$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

e questo dimostra (14).

Avendo dimostrato sia base induttiva che passo induttivo, la tesi segue dal principio di induzione e dall'arbitrarietà di x. □

Esercizio 7 -(8) Usando il principio di induzione, dimostrare che per ogni numero naturale $n \geq 2$ l'intersezione di n intervalli aperti è un intervallo aperto o l'insieme vuoto.

Soluzione. Innanzitutto verifichiamo la base dell'induzione, cioè quando $n = 2$. Siano $I_1 = (a,b)$ e $I_2 = (c,d)$ con $a,b,c,d \in \mathbb{R}^*$ (ricordiamo $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$).

Siano $e_1 = \max\{a, c\}$ e $e_2 = \min\{b, d\}$ (con la convenzione che per ogni $x \in \mathbb{R}^*$ $\max\{x, +\infty\} = +\infty$ e $\min\{x, -\infty\} = -\infty$). Per la definizione di intervallo abbiamo

$$\begin{aligned} I_1 \cup I_2 &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a \wedge x > c \wedge x < b \wedge x < d\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > e_1 \wedge x < e_2\} = \begin{cases} (e_1, e_2) & \text{se } e_1 < e_2 \\ \emptyset & \text{altrimenti.} \end{cases} \end{aligned}$$

e questo completa la dimostrazione della base induttiva.

Assumiamo ora l'ipotesi induttiva, cioè che fissato qualche $n \geq 2$, presi n intervalli $J_1, \ldots, J_n$ uno ha che $J_1 \cap J_2 \cap \cdots \cap J_n$ è un insieme aperto oppure l'insieme vuoto. Vogliamo dimostrare il passo induttivo, cioè che per qualsiasi scelta di $n+1$ intervalli aperti $J_1, \ldots, J_n, J_{n+1}$ uno ha che $J_1 \cap J_2 \cap \cdots \cap J_n \cap J_{n+1}$ è un insieme aperto oppure l'insieme vuoto. Chiamiamo

$$I_1 := J_1 \cap J_2 \cap \cdots \cap J_n$$

e $I_2 := J_{n+1}$. Osserviamo che per definizione I_1 è l'intersezione di n intervalli aperti e quindi per l'ipotesi induttiva è un insieme aperto o un insieme vuoto. Osserviamo inoltre che per la proprietà associativa dell'intersezione di insiemi

$$J_1 \cap J_2 \cap \cdots \cap J_n \cap J_{n+1} = (J_1 \cap J_2 \cap \cdots \cap J_n) \cap J_{n+1} = I_1 \cap I_2$$

Quindi se I_1 è l'insieme vuoto allora anche $I_1 \cap I_2$ è l'insieme vuoto e quindi questo dimostra il passo induttivo. Se viceversa I_1 è un insieme aperto allora $I_1 \cap I_2$ è l'intersezione di due insiemi aperti e, dimostrando la base dell'induzione, abbiamo già fatto vedere che l'intersezione di due insiemi aperti è un insieme aperto oppure l'insieme vuoto. Questo conclude la dimostrazione del passo induttivo.

Avendo dimostrato sia base induttiva che passo induttivo, la tesi segue dal principio di induzione. $\square$

Foglio 2

Massimi, minimi, estremi superiori ed inferiori.

Esercizio 1 Calcolare gli estremi inferiori e superiori dei seguenti insiemi, indicare quali di questi estremi sono anche massimo oppure minimo:

(1) $\left\{1-\frac{2}{n^3} \mid n\in\mathbb{N}, n\geq 1\right\}$
(2) $\left\{\frac{4}{5^n} \mid n\in\mathbb{N}, n\right\}$
(3) $\left\{\sum_{k=0}^{n} 3^k \mid n\in\mathbb{N}, n\geq 1\right\}$ (esercizio proposto a lezione).
(4) $\left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} \mid n\in\mathbb{N}, n\geq 1\right\}$
(5) $\left\{n \mid n^2+2n\geq 5,\ n\in\mathbb{N}\right\}$
(6) $\left\{x\in\mathbb{R} \mid \sqrt{x^2+2}\leq x+3\right\}$
(7) $\left\{x\in\mathbb{R} \mid 2\log x^2 < 3\right\}$
(8) $\left\{x\in\mathbb{R} \mid |x^2-2| > x+1\right\}$
(9) $\{x\in\mathbb{R} \mid |\log x| < 1\}$

Esercizio 2 Applicando la definizione di estremo superiore ed inferiore (ed, in particolare, la loro caratterizzazione), dimostrare le seguenti uguaglianze

$$\sup\left\{\frac{n}{n+1} \mid n\in\mathbb{N}\right\} = 1$$

$$\inf\left\{\frac{1}{\log(n+1)} \mid n\in\mathbb{N}\right\} = 0$$

Esercizio 3 Applicando la definizione di estremo superiore e ricordando la formula per la sommatoria geometrica (cioè delle potenze di un numero reale), dimostrare che se $q\in(0,1)$ allora l'insieme

$$\left\{\sum_{k=0}^{n} q^k \mid n\in\mathbb{N}, n\geq 1\right\}$$

è limitato superiormente.

Funzioni composte.

Esercizio 4 Calcolare le funzioni composte $g\circ f$ e $f\circ g$ dove

$$f(x) = \begin{cases} x-9 & \text{se } x\geq 1 \\ 2x & \text{se } x<1 \end{cases}$$

e $g(x) = x^2$.

Esercizio 5 Calcolare le funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$ dove

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{se } |x| \geq 1 \\ x^2 & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$$

e $g(x) = x^2$.

Esercizio 6 Calcolare il dominio naturale della funzione $g \circ f(x)$ dove

(1) $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sqrt{x - \frac{1}{2}}$;
(2) $f(x) = \sin^2 x$, $g(x) = \sqrt{x - \frac{1}{2}}$;
(3) $f(x) = \tan x$, $g(x) = \log x$
(4) $f(x) = \log_3 x + \log_3(x-4)$, $g(x) = \log_2 x$;
(5) $f(x) = |x| - 1$, $g(x) = \sqrt{x}$;
(6) $f(x) = |x+2| - 3$, $g(x) = \log x$;
(7) $f(x) = |x^2 - 1| - 1$, $g(x) = \frac{1}{x}$;

Esercizio 7 (Esercizi proposti a lezione) Calcolare il dominio naturale delle seguenti funzioni composte

(1) $f(x) = \log(\sqrt{x} - 3)$;
(2) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$;
(3) $f(x) = \tan x$
(4) $f(x) = \log(\sin x)$;
(5) $f(x) = \frac{1}{e^{x^2-1} - 1}$;
(6) $f(x) = \frac{1}{\sin x + \cos x}$;
(7) $f(x) = \log(e^x - 2)$;
(8) $f(x) = \frac{1}{\log(x+3)}$;
(9) $f(x) = \tan(\pi(x-1))$;
(10) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3 + e^{\frac{1}{x}}}$.

Immagine di funzioni elementari.

Esercizio 8 Calcolare l'immagine delle seguenti traslazioni e riscalamenti di funzioni elementari

(1) $f(x) = x^2 + 2$
(2) $f(x) = x^3 - 1$
(3) $f(x) = e^x + 2$
(4) $f(x) = 3\cos x$
(5) $f(x) = \frac{1}{x} + 2$
(6) $f(x) = -2(\sin x + 1)$
(7) $f(x) = 3\arctan(x) + 2$

Funzioni inverse. ·

Esercizio 9 Calcolare l'inversa delle seguenti funzioni

(1) $f(x) = \frac{1}{x^3-1}$
(2) $f(x) = e^{x+1}$
(3) $f(x) = \log(x^2+1)$ ristretta alla semiretta $[0, +\infty)$
(4) $f(x) = \cos(3x)$ ristretta all'intervallo $[0, \pi]$
(5)
$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se} x \geq 2 \\ \frac{1}{x-2} & \text{se} x < 2 \end{cases}$$

Soluzioni di alcuni esercizi del Foglio 2

NOTA: Le soluzioni proposte sono da intendersi come uno strumento didattico da usare durante il corso e sono pertanto aggiornate alle tecniche e agli strumenti teorici forniti a lezione fino alla settimana di riferimento del foglio di esercizi (in questo caso fino alla seconda settimana). Con l'avanzare del corso verranno fornite soluzioni alternative agli esercizi proposti, perntanto le soluzioni qui di seguito non sono in alcun modo da considerarsi esaustive nè vincolanti.

Massimi, minimi, estremi superiori ed inferiori. ·

Esercizio 1-(2) Da un'analisi dei primi elementi dell'insieme $\{\frac{4}{5^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$:

$$4 > \frac{4}{5} > \frac{4}{5^2} > \cdots$$

possiamo congetturare che il l'estremo superiore sia 4 e l'estremo inferiore sia 0. Per dimostrarlo osserviamo che

- 4 è un maggiorante per l'insieme, infatti per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo $5^n \geq 1$ quindi
$$\frac{4}{5^n} \leq \frac{4}{1} = 4$$
Inoltre 4 appartiene all'insieme, pertanto è un massimo e quindi anche l'estremo superiore.
- 0 è un minorante per l'insieme, infatti per ogni $n \in \mathbb{N}$
$$\frac{4}{5^n} > 0.$$
Per dimostrare che è il più grande dei minoranti, cioè l'estremo inferiore, fissiamo $\varepsilon > 0$ e osserviamo che
$$\frac{4}{5^n} < 0 + \varepsilon \Leftrightarrow 5^n > \frac{4}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \log_5(\frac{4}{\varepsilon})$$
Quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero naturale n_ε tale che $\frac{4}{5^n} < \varepsilon$ (è sufficientemente scegliere n_ε maggiore di $\log_5(\frac{4}{\varepsilon})$) e questo conclude la dimostrazione.

Osserviamo infine che 0 non appartiene all'insieme quindi quest'ultimo non ha minimo.

Funzioni composte. ·

Esercizio 4 Calcolare le funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$ dove

$$f(x) = \begin{cases} x - 9 & \text{se } x \geq 1 \\ 2x & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

e $g(x) = x^2$.

Soluzione. Innanzitutto osserviamo che il dominio di g e il dominio di f sono $\mathbb{R}$, per cui $f \circ g$ e $g \circ f$ sono definite in $\mathbb{R}$. Per definizione di funzione composta $f \circ g : x \mapsto f(g(x)) = (f(x^2))$. Pertanto

$$g \circ f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{se } x^2 \geq 1 \\ 2x^2 & \text{se } x^2 < 1 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{se } |x| \geq 1 \\ 2x^2 & \text{se } |x| < 1 \end{cases}.$$

□

Esercizio 7 - (1) Calcolare il dominio naturale della funzione composta $h(x) = \log(\sqrt{x} - 3)$.

Soluzione. Sia $f(x) = \sqrt{x} - 3$ e $g(x) = \log(x)$. Abbiamo *dom* $f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ e *dom* $g = \mathbb{R}^+$. Pertanto

$$\begin{aligned} dom\ g \circ f &= \{x \in dom\ f \mid f(x) \in dom\ g\} = \{x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \mid \sqrt{x} - 3 > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \mid x > 9\} = (9, +\infty). \end{aligned}$$

□

Immagine di funzioni elementari. ·

Esercizio 8-(3) Calcolare l'immagine di $f(x) = e^x + 2$.

Soluzione. Innanzitutto osserviamo che $f(x) = g(x) + 2$ dove $g(x) = e^x$ e *im* $g = (0, +\infty)$. Quindi

$$im\ f = im\ (g + 2) = im\ g + 2 = \{x + 2 \mid x \in im\ g\} = (2, +\infty)$$

□

Esercizio 8-(4) Calcolare l'immagine di $f(x) = 3\cos(x)$.

Soluzione. Innanzitutto osserviamo che $f(x) = 3g(x)$ dove $g(x) = \cos x$ e *im* $g = [-1, 1]$. Quindi

$$im\ f = im\ (3g) = 3im\ g = \{3x \mid x \in im\ g\} = [-3, 3]$$

□

Funzioni inverse. ·

Esercizio 9 - (3) Calcolare l'inversa di $f(x) = \log(x^2+1)$ ristretta alla semiretta $[0, +\infty)$.

Soluzione. Innanzitutto osserviamo che $f(x) = \log(x^2+1)$ è strettamente crescente in $[0, +\infty)$ in quanto

$$x^2 \text{ strett. crescente} \Rightarrow x^2 + 1 \text{ strett. crescente},$$

$\log x$ è strettamente crescente e quindi f è composizione di funzioni strettamente crescenti. Poichè f è strettamente crescente è anche iniettiva e quindi invertibile. Costruiamo l'inversa di f risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \log(x^2 + 1) = y \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = e^y \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{e^y - 1}$$

Quindi $f^{-1} : x \mapsto \sqrt{e^x - 1}$. Osserviamo infine che il dominio di f^{-1} è $[0, +\infty)$ che, naturalmente, coincide con l'immagine di f $\square$

Foglio 3

Monotonia.

Esercizio 1 Dimostrare che

(1) e^{-x^2} è decrescente in $\mathbb{R}$ e limititata.
(2) $\log(x+2)$ è crescente nel suo dominio e illimitata sia superiormente che inferiormente
(3) $arctan(x^3+2)$ è crescente nel suo dominio e limitata
(4) $\frac{1}{x^3}$ è decrescente in $\mathbb{R}^+$ e limitata inferiormente.

Esercizio 2 Individuare gli intervalli in cui le seguenti funzioni sono definite e sono crescenti.

(1) $\sin(x+1)$
(2) $\cos(x^2-1)$
(3) $\tan(1/x)$

Funzioni periodiche, pari e dispari.

Esercizio 3 Indichiamo con $\lfloor x \rfloor$ la funzione *parte intera inferiore* di x $\lfloor x \rfloor : x \mapsto \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$

- Calcolare $\lfloor 3.2 \rfloor$, $\lfloor -2.1 \rfloor$, $\lfloor 2.1 \rfloor$, $\lfloor 4 \rfloor$ e $\lfloor 3.9 \rfloor$.
- Dimostrare che $x - \lfloor x \rfloor$ è una funzione periodica di periodo 1.

Esercizio 3 Indichiamo con $\lfloor x \rfloor$ la funzione *parte intera inferiore* di x $\lfloor x \rfloor : x \mapsto \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$

- Calcolare $\lfloor 3.2 \rfloor$, $\lfloor -2.1 \rfloor$, $\lfloor 2.1 \rfloor$, $\lfloor 4 \rfloor$ e $\lfloor 3.9 \rfloor$. Dimostrare che $\lfloor x \rfloor$ è una funzione periodica di periodo 1.

Esercizio 4[Esercizio proposto a lezione] Assumendo che $\sin x$ e $\cos x$ siano funzioni periodiche di periodo 2π, dimostrare che $\tan x$ è una funzione periodica di periodo π.

Esercizio 5[Esercizio proposto a lezione] Calcolare il periodo delle seguenti funzioni

$$\cos(2x); \quad \sin(3x+2); \quad \tan\left(\frac{x}{2}\right).$$

Esercizio 6[Esercizio proposto a lezione] Dimostare che

- $\sin(x^2)$ e $x^4 - 3x^2 + 1$ sono una funzioni pari
- $\sin(3x)$ è dispari

Proprietà che valgono definitivamente.

Esercizio 8[Esercizio proposto a lezione] Dimostrare che

(1) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ è definitivamente maggiore di 3 per $x \to 0$
(2) per ogni $M \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ è definitivamente maggiore di M per $x \to 0$ (cioè $f(x) \to +\infty$ per $x \to 0$)
(3) $f(x) = \log x$ è definitivamente positiva per $x \to \infty$
(4) $f(x) = (x-1)^4$ è definitivamente minore di $g(x) = (x-1)^2$ per $x \to 0$
(5) $f(x) = x^3$ è definitivamente negativa per $x \to -\infty$
(6) per ogni $M \in \mathbb{R}$ $f(x) = x^3$ è definitivamente minore di M per $x \to -\infty$ (cioè $f(x) \to -\infty$ per $x \to -\infty$)

Definizione di limite.

Esercizio 8 Applicando la definizione, dimostrare che

(1) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
(2) $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
(3) $\lim_{x\to 0} \log(x+1) = 0$
(4) $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
(5) $\lim_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$
(6) $\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$

Esercizio 9 Utilizzando l'algebra dei limiti finiti, calcolare i seguenti limiti:

- $\lim_{x\to\pi} \sin x + 2\cos x$
- $\lim_{x\to 1} \sin(\frac{3}{2}\pi x)e^{x-1}$
- $\lim_{x\to\infty} e^{-x} + \frac{1}{x} + \frac{x}{x+1}$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{ax^n}{bx^n+1}$ dove $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $n \in \mathbb{N},\ n > 1$
- $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3+3x}{x^4+2x^2+1}$

Foglio 4

Limiti di funzioni e ordini di infinitesimi.

Esercizio 1 Calcolare i seguenti limiti

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{|-x^3-4x+2|}{x+1}$
- $\lim_{x\to+\infty} \log|x| + \sqrt{x} - \sqrt{2x+1}$
- $\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x^2-x}{x}}$
- $\lim_{x\to+\infty} \log(\sin x + x)$
- $\lim_{x\to 0^-} xe^{\frac{1}{x}}$
- $\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}$
- $\lim_{x\to -1^-} (x+1)\log(x^2-1)$

Esercizio 2 Dimostrare che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$ per $x \to x_0$ dove

- $f(x) = \sin 2x^3$, $g(x) = \sqrt{x^2+x}$, $x_0 = 0^+$;
- $f(x) = 1 - \cos(\log(x+1))$, $g(x) = |x|$, $x_0 = 0$;
- $f(x) = e^x$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -\infty$;
- $f(x) = arctan(x^2-4)$, $g(x) = \log(x-1)$, $x_0 = 2$;

Esempio. La funzione $f(x) = e^{-x}$ è un infinitesimo di ordine superiore a $\log(1+\frac{1}{x})$ per $x \to +\infty$. Infatti ricordiamo il limite notevole $\lim_{y\to 0} \frac{y}{\log(1+y)} = 1$ e, effettuando il cambio di variabile $y = \frac{1}{x}$ per il teorema di esistenza del limite di funzioni composte questo implica

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = 1$$

Ricordiamo anche dalla gerachia degli infiniti che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

Abbiamo quindi per l'algebra dei limiti finiti

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{\log(1+\frac{1}{x})} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{x}} \frac{\frac{1}{x}}{\log(1+\frac{1}{x})} = 0.\end{aligned}$$

□

Esercizio 3 Stabilire quali delle seguenti coppie di funzioni sono asintotiche per $x \to x_0$ dove

- $f(x) = e^{x^2} - 1$, $g(x) = e^{1-\cos x} - 1$, $x_0 = 0$;
- $f(x) = \sin x^3$, $g(x) = arctan(x^3 + x^4)$, $x_0 = 0$;
- $f(x) = e^x + x^2$, $g(x) = e^x + \log x$, $x_0 = +\infty$;
- $f(x) = \log(1+x)$, $g(x) = x$, $x_0 = +\infty$;

Esempio. Le funzioni $f(x) = arctan\ 2x$ e $f(x) = \log(1+x)$ non sono asintotiche tra di loro (ma hanno lo stesso ordine di infinitesimo). Infatti ricordando i limiti notevoli $\lim_{x\to 0} \frac{arctan x}{x} = 1$ e $\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1$ per il teorema di esistenza del limite delle funzioni composte e l'algebra dei limiti finiti possiamo dedurre

$$\lim_{x\to 0} \frac{arctan 2x}{x} = \lim_{x\to 0} 2\frac{arctan 2x}{2x} = \lim_{y\to 0} 2\frac{arctan\ y}{y} = 2.$$

Abbiamo quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{arctan\ 2x}{\log(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{arctan\ 2x}{x} \frac{x}{\log(1+x)} = 2 \neq 1.$$

$\square$

Esercizio 4 Calcolare l'insieme

$$A := \{\alpha \in \mathbb{R}^+ \mid f(x) = o(x^\alpha) \text{ per } x \to x_0\}$$

dove

- $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0^+$;
- $f(x) = \sqrt{x^3+2}$, $x_0 = +\infty$;
- $f(x) = \log(1+\sin x^2)$, $x_0 = 0^+$;
- $f(x) = e^{arctan\sqrt{x}} - 1$, $x_0 = 0^+$;

Esempio. Se $f(x) = \tan x^3$ allora $A = (0,3)$. Per dimostrarlo innanzitutto osserviamo che, per definizione di $o(x^\alpha)$, abbiamo

$$A = \{\alpha \in \mathbb{R}^+ \mid \lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x^3}{x^\alpha} = 0\}$$

Ricordando il limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

per il teorema di esistenza del limite delle funzioni composte possiamo dedurre

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x^3}{x^3} = 1$$

quindi abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x^3}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{x^\alpha} \frac{\tan x^3}{x^3} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \in (0,3) \\ 1 & \text{se } \alpha = 3 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 3 \end{cases}$$

$\square$

Foglio 5

Ordini di infinitesimo.

Stabilire l'ordine di infinitesimo rispetto ad x di $f(x)$ per $x \to 0$, dove

- $f(x) = e^x - 1 + \arctan(x^2)$
- $f(x) = \tan(\log(1 + \sqrt{|x|}))$
- $f(x) = \frac{1}{2}x + \sin x^2 + 3\cos(\sqrt{|x|})$
- $f(x) = (1 - \cos(1 + 2x))^3$
- $f(x) = \frac{\sin(5x^4)}{x^2}$
- $f(x) = \frac{\log(1+2x^5)}{1-\cos(x^2)}$

Esempio. Per calcolare l'ordine di infitesimo rispetto ad x di

$$f(x) = \frac{\cos(x^2) - e^{x^3} + \log(1 + 5\arctan(x^3))}{5\sin^2(x)}$$

per $x \to 0$, osserviamo possiamo dedurre da alcuni limiti notevoli le uguaglianze:

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$

$$e^{x^3} = 1 + x^3 + o(x^3)$$

$$\begin{aligned} \log(1 + 5arctan(x^3)) &= 5arctan(x^3) + o(arctan(x^3)) \\ &= 5(x^3 + o(x^3)) + o(x^3 + o(x^3)) \\ &= 5x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5\sin^2 x &= 5(x + o(x))^2 \\ &= 5(x^2 + 2xo(x) + o(x)o(x)) \\ &= 5x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

sostituendo in $f(x)$ otteniamo per $x \to 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) - (1 + x^3 + o(x^3)) + 5x^3 + o(x^3)}{5x^2 + o(x^2)} \\ &= \frac{6x^3 + o(x^3)}{5x^2 + o(x)} \\ &= \frac{6}{5}x + o(x) \end{aligned}$$

e quindi l'ordine di $f(x)$ è 1. Infatti, in vista dell'uguaglianza qui sopra, abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^1} = \frac{\frac{6}{5}x + o(x)}{x} = \frac{6}{5} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

□

Serie numeriche a termini non-negativi.

Studiare il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
dove

- $a_n = arctan\left(\frac{n^2}{n^n}\right)$;
- $a_n = \frac{1}{\log n + n^2}$;
- $a_n = \frac{1}{\log n + n}$;
- $a_n = \frac{e^n + 2}{n^n}$;
- $a_n = \frac{!n}{n^n}$;
- $a_n = \log\left(\cos(\frac{1}{\sqrt{n}})\right)$;
- $a_n = \frac{(n+1)n}{2^n}$
- $a_n = \frac{e - \sin n^2}{n^2 + n^3}$
- $a_n = \frac{!n}{!(n+2)}$
- $a_n = \sin\left(\log(1 + \frac{1}{3n})\right)$;
- $a_n = \frac{\log(n+1)}{3n^3 + n}$;
- $a_n = \frac{!n + 2n}{!(n+1) + \log n}$

Esempio. Se $a_n = e^{\frac{1}{n^2}} - \cos(\frac{1}{n})$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Infatti innanzitutto osserviamo che
$$\begin{aligned} a_n &= e^{\frac{1}{n^2}} - 1 + 1 - \cos(\frac{1}{n}) \\ &= \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$
questo implica che

(1) la condizione necessaria di convergenza è soddisfatta, infatti $a_n \to 0$ per $n \to \infty$
(2) $a_n \sim \frac{3}{2n^2}$ per $n \to \infty$

Inoltre osserviamo che $e^x > 1$ per ogni $x > 0$ e, in particolare $e^{\frac{1}{n^2}} > 1$ per ogni $n \geq 1$. Quindi abbiamo per ogni $n \geq 1$
$$a_n = e^{\frac{1}{n^2}} - \cos\left(\frac{1}{n}\right) > 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) > 0.$$
Quindi a_n è una serie a termini positivi. Ora, dalla convergenza della serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ segue (per l'algebra dei limiti finiti) la convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n^2}$ e infine, per il criterio del confronto asintotico, anche la convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Esempio. Se $a_n = n \log(1 + \frac{1}{n})$ allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. Infatti $a_n \geq 0$ per ogni n, quindi $\sum_{n=1} a_n$ è una serie regolare. Inoltre a_n non soddisfa la condizione necessaria di convergenza, infatti

$$\lim_{n\to\infty} n\log(1+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 \neq 0$$

e quindi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è una serie divergente. $\square$

Foglio 6

Serie a segni alterni.

Studiare convergenza assoluta e semplice delle seguenti serie

- $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n \log \sqrt{n}}$
- $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n+\sqrt{n}}{e^n+n^2}$
- $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n-1}{n^3+2n+1}$

Esempio. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\log n}{n^2}$ converge assolutamente. Per dimostrarlo definiamo

$$a_n := |(-1)^n \frac{\log n}{n^2}| = \frac{\log n}{n^2}$$

e dimostriamo la convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Innanzitutto abbiamo che $a_n \to 0$ per $n \to \infty$ (per la gerarchia degli infiniti) e quindi la condizione necessaria di convergenza è soddisfatta. Inoltre osserviamo che per ogni $\alpha \in (1,2)$, posto $b_n := \frac{1}{n^\beta}$ abbiamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge perchè è una serie armonica generalizzata e inoltre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^{\alpha-2}} = 0.$$

Possiamo quindi dedurre dal criterio del confronto asintotico che anche $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è una serie convergente.

Poichè una serie assolutamente convergente è anche semplicemente convergente, anche $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\log n}{n^2}$ converge. □

Continuità.

Calcolare il dominio di $f(x)$, studiarne la continuità (nel suo di dominio) di $f(x)$ e caratterizzare eventuali punti di discontinuità di $f(x)$ dove

(1)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x-3)^2}{x-3} & \text{x} \neq 3 \\ 1 & x = 3 \end{cases}$$

(2)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \log \frac{x^2+1}{x^2} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

(3)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi x^2}{1-\cos(\pi x)} + 2 & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

Esempio. Risolviamo l'esercizio nel caso in cui

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2}-1}{3x^2} & \text{x} \neq 0 \\ \frac{1}{3} & x = 0. \end{cases}$$

Innanzitutto osserviamo che il dominio di questa funzione è $\mathbb{R}$ (verificare e dimostrare per esercizio). Se $x \neq 0$ allora la funzione è continua in quanto rapporto e composizione di funzioni continue (e non nulle). Resta da studiare la continuità in 0. Ora, $f(x)$ è continua in 0 se e solo se

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

cioè se e solo se
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{3x^2} = \frac{1}{3}$$
Ma questa uguaglianza segue immediatamente dal fatto che $e^{x^2}-1 = x^2 + o(x^2)$ e quindi
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+o(x^2)}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$
□

Derivabilità.

Applicando la definizione di derivata, dimostrare che
$$f(x) = |x^2-1|$$
non è derivabile in 1 e in -1. Stabilire se 1 e -1 sono punti angolosi, cuspidi, a tangente verticale o nessuno dei precedenti.

Calcolo delle derivate.

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni

- $f(x) = e^{3x^2}$
- $f(x) = \log(x+1) + e^{3x^2} + \tan x$
- $f(x) = |x^3-1|$ (per $x \not 1$)
- $f(x) = \cos(\log(x^2+3+e^{2x}))$ (per $x \not 1$)
- $f(x) = \frac{\log x}{x}$
- $f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x+1}}$
- $f(x) = e^x(x^2+\sin(3x^2))$
- $f(x) = \tan(\log x)$

Esempio. Per calcolare la derivata di $f(x) = |x|$ (assumendo $x \neq 0$) innanzitutto ricordiamo che
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ -x & x \geq 1 \end{cases}$$
Quindi se $x > 0$ allora $f(x) = 1$ e, di conseguenza, $f'(x) = 1$. Analogamente, se $x < 0$ allora $f'(x) = -1$. Riassumendo possiamo dire che se $x \neq 0$ allora $f'(x) = sign(x)$.

□

Esempio. Applichiamo la regola della catena per calcolare la derivata di
$$f(x) = \cos(\log(x^5+3x+2))$$
Osserviamo che $f(x) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x)$ dove
$$g_1(x) = x^5+3x+2 \quad g_2(x) = \log x \quad g_3(x) = \cos x$$
e le cui derivate sono rispettivamente
$$g_1'(x) = 5x^4+3 \quad g_2'(x) = \frac{1}{x} \quad g_3(x) = -\sin x$$
Abbiamo quindi
$$f'(x) = g_3'(g_2(g_1(x)))g_2'(g_1(x))g_1'(x) = -\sin(\log(x^5+3x+2))\frac{1}{x^5+3x+2}(5x^4+3).$$
□

Studio della monotonia di una funzione.

Studiando il segno della derivata, individuare i sottointervalli del dominio di $f(x)$ in cui questa è crescente o decrescente, dove

- $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$
- $f(x) = \log(x^2 - 1)$
- $f(x) = \log|x|$
- $f(x) = e^{-x^2+4}$

Esempio. Sia $f(x) = |\log x|$. Osserviamo che il dominio di $f(x)$ è $\mathbb{R}^+$ (dimostrare per esercizio), $f(x)$ è continua su tutto il dominio in quanto composizione di funzioni continue ed è derivabile in tutto

$$\mathbb{R}^+ \setminus \{x \in dom\ f \mid \log x = 0\},$$

in quanto $f(x)$ è composizione di una funzione derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, cioè $|x|$, con una derivabile in tutto $\mathbb{R}^+$, cioè $\log x$. Applicando la definizione di valore assoluto, riscriviamo $f(x)$ come segue

$$f(x) = \begin{cases} \log x & x \geq 1 \\ -\log x & x \in (0,1) \end{cases}$$

Da questo possiamo dedurre che

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 1 \\ -\frac{1}{x} & x \in (0,1) \end{cases}$$

e quindi

$$f'(x) > 0 \text{ se } x > 1$$

e di conseguenza $f(x)$ è crescente per $x > 1$. Inoltre

$$f'(x) < 0 \text{ se } x \in (0,1)$$

e di conseguenza $f(x)$ è decrescente per $x \in (0,1)$.

Osserviamo infine che 1 è un punto angoloso per $f(x)$ (da dimostrare per esercizio). □

Foglio 7

Studio di funzioni a variabile reale.

Data la funzione $f(x)$ determinarne l'insieme di definizione e il segno; stabilire se $f(x)$ è una funzione pari, dispari, periodica o nessuna delle precedenti; studiare la continuità di $f(x)$ nel suo insieme di definizione, calcolare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, eventuali punti di non derivabilità, studiare la monotonia della funzione, calcolare eventuali massimi e minimi relativi. Studiare la concavità della funzione, determinando eventuali flessi. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

- $f(x) = \log(1 + x^2)$
- $f(x) = xe^{-x^2+1}$
- $f(x) = arctan(\sqrt{x+1})$
- $f(x) = |\log x - 1| + x$

Esempio. Sia $f(x) = \log(x^2 - 2x + 3)$. L'insieme di definizione di $f(x)$ è $domf = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x - 3 > 0\}$. Risolvendo la disequazione $x^2 - 2x - 3 > 0$ possiamo riscrivere $domf = (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$. Poiché

$$\log(x^2 - 2x - 3) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 > 1$$

otteniamo $f(x) > 0$ se e solo se $x \in (-\infty, 1 - \sqrt{5}) \cup (1 + \sqrt{5}, +\infty)$. $f(x)$ non è una funzione pari, nè dispari, nè periodica, ma è continua nel suo insieme di definizione perché composizione di funzioni continue in tutto il loro insieme di definizione. I punti di frontiera dell'insieme di definizione di $f(x)$ sono $\pm\infty, -1$ e 3. Poiché per $x \to \pm\infty$ abbiamo $x^2 - 2x - 3 \to +\infty$ per l'algebra e la gerarchia dei limiti infiniti, possiamo porre $t = x^2 - 2x - 3$ e ottenere

$$\lim_{x\to\pm\infty} \log(x^2 - 2x - 3) = \lim_{t\to+\infty} \log t = \lim_{t\to-\infty} \log t = +\infty.$$

In particolare $f(x)$ non ammette asintoti orizzontali. Poiché $x^2 - 2x - 3 \to 0^+$ per $x \to -1^-$, posto $t = x^2 - 2x - 3$ otteniamo

$$\lim_{x\to-1^-} \log(x^2 - 2x - 3) = \lim_{t\to0^+} \log t = -\infty.$$

e, analogamente,

$$\lim_{x\to3^+} \log(x^2 - 2x - 3) = \lim_{t\to0^+} \log t = -\infty,$$

quindi $f(x)$ ha due asintoti verticali di equazione $x = -1$ e $x = 3$.

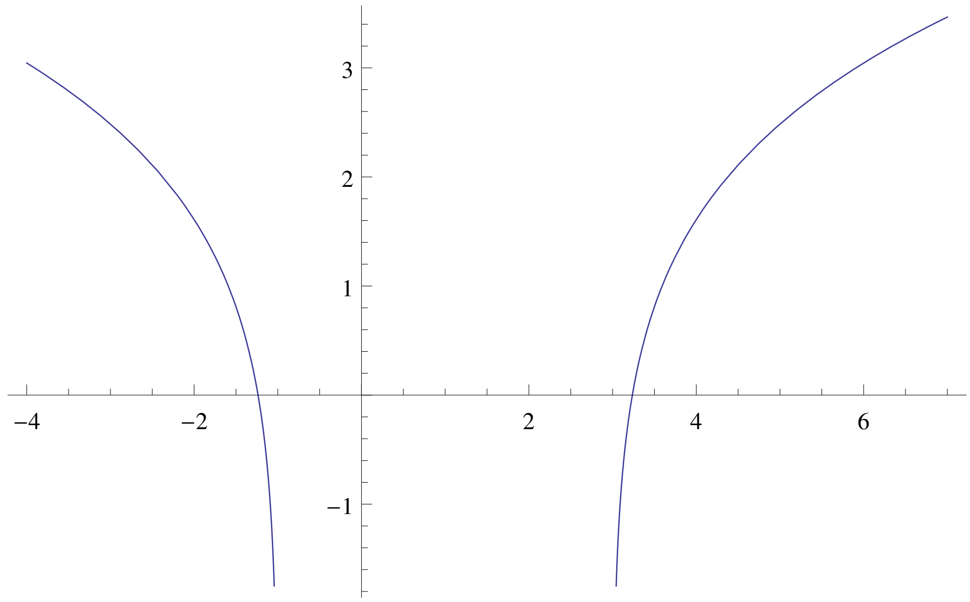
$f(x)$ non ammette asintoti obliqui, infatti per la gerarchia degli infiniti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^2 - 2x - 3)}{x} = 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{\log(x^2 - 2x - 3)}{x}.$$

$f(x)$ è derivabile in tutto il suo insieme di definizione, in quanto composizione di funzioni derivabili in tutto il loro insieme di definizione, e, per la regola della catena,

$$f'(x) = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x - 3}.$$

Osserviamo che $f'(x)$ è definita solo nell'insieme di definizione di $f(x)$. Ora, $f'(x) = 0$ se e solo se $2x - 2 = 0$, cioé $x = 1$. Poiché 1 non appartiene all'insieme di



definizione di $f(x)$, per il teorema di Fermat $f(x)$ non ammette punti di estremo relativo. Lo studio del segno della derivata porta alla disequazione

$$\frac{2x-2}{x^2-2x-3} > 0$$

da cui possiamo dedurre che $f'(x) > 0$ se $x > 3$ e $f'(x) < 0$ se $x < -1$ (bisogna intersecare l'insieme in cui $\frac{2x-2}{x^2-2x-3} > 0$ con $dom f$). Pertanto $f(x)$ è crescente in $(3, +\infty)$ e decrescente in $(-\infty, -1)$. Infine abbiamo che la derivata seconda di $f(x)$ è

$$f''(x) = \frac{-6x^2+12x+2}{(x^2-2x-3)^2}.$$

Abbiamo $f''(x) \geq 0$ se e solo se $-6x^2 + 12x + 2 \geq 0$ ed equivalentemente

$$\frac{1}{3}\left(3-2\sqrt{3}\right) \geq x \geq \frac{1}{3}\left(3+2\sqrt{3}\right)$$

Poichè $[\frac{1}{3}\left(3-2\sqrt{3}\right), \frac{1}{3}\left(3+2\sqrt{3}\right)] \cup dom(f) = \emptyset$, abbiamo che $f(x)$ è concava in tutto il suo dominio e non ammette punti di flesso. □

Continuità di una funzione a variabile reale.

Studiare la continuità in 0 di $f(x)$ dove

- $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2}-1}{x} & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0; \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(4x^2)}{e^{x^2}} & \text{se } x \neq 0; \\ 2 & \text{se } x = 0; \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x^3+x^2+1}}{x^3} & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0; \end{cases}$

Dimostrazione. Esempio Per studiare in $x = 0$ la continuità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } \ x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

osserviamo che la funzione $f(x)$ è continua in $x = 0$ se e solo se

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0).$$

Ora, $\cos(y) \in [-1, 1]$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, in particolare se $y = \frac{1}{x}$ otteniamo

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

e quindi

$$-x^2 \leq x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2.$$

Poiché $\lim_{x \to 0} -x^2 = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$, dal teorema del confronto per limiti di funzioni otteniamo

$$\lim_{x \to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$$

e quindi la continuità in $x = 0$ di $f(x)$.

Sviluppi di Taylor e limiti di funzioni.

Utilizzando gli sviluppi di Taylor (e opportuni cambi di variabile) calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{-\log(1+x) + 2\cos(\sqrt{x}) - 2e^x + \sin 4x}{\sqrt{x^4 + 1} - 1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} \sin\left(\log\left(1 + \sqrt{\frac{1}{x^3}}\right)\right)$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{arctan(\log(x-1)^5 + 1 - e^{x^2-4})}{x-2}$$

Esempio. Per calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(2x) - x \sin x - e^{x^2} - \cos x}{x}$$

osserviamo che per $x \to 0$, $\cos(2x) = 1 - 2x^2 + o(x^3)$, $\sin x = x + o(x^2)$ e $e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$. Quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\cos(2x) - x \sin x - e^{x^2} - \cos x}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{1 - 2x^2 + o(x^3) - x^2 + o(x^3) - 1 - x^2 + o(x^2)}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{-4x^2 + o(x^2)}{x} = 0. \end{aligned}$$

Osserviamo inoltre che dall'uguaglianza

$$\frac{\cos(2x) - x \sin x - e^{x^2} - \cos x}{x} = \frac{-4x^2 + o(x^2)}{x} = -4x + o(x)$$

per $x \to 0$, deduciamo che l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ è 1, infatti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{-4x + o(x)}{x} = -4 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

□

Resto di Lagrange. ·

Sia $f(x) = e^x$ e sia $T_n(x)$ il polinomio di Taylor centrato in 0 di $f(x)$. Stabilire il più piccolo intero n tale che

$$|f(1) - T_n(1)| \leq \frac{e}{24}$$

Serie di Taylor. ·

Determinare le serie di Taylor centrate in 0 di $f(x)$ dove

- $f(x) = e^{x+1}$
- $f(x) = \log(2 + 3x^2)$
- $f(x) = \cos(x - 2)$

Foglio 8

Numeri complessi.

Determinare inverso, modulo, argomento e scrivere in forma trigonometrica ed esponenziale i seguenti numeri complessi

- $-1+i$;
- $(\sqrt{3}+i)(2-2i)$;
- $(4+4\sqrt{3})^{32}$;

Equazioni nel campo dei numeri complessi.

Risolvere le seguenti equazioni

- $z+\overline{z}=5$;
- $z^2-i2z+4=0$;
- $z^{12}-2z^6+1=0$;
- $|z|^2-z^2-1=0$.

Esempio. Calcoliamo le soluzioni dell'equazione $z^6-3z^3+2=0$. Posto $y=z^3$, l'equazione $z^6-3z^3+2=0$ si riduce a $y^2-3y+2=0$, le cui soluzioni sono $y_1=2$ e $y_2=1$. Quindi restano da risolvere le equazioni $z^3=y_1=2$ e $z^3=y_2=1$, da cui otteniamo rispettivamente

$$z_{1,2,3}=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{2\pi}{3}},\sqrt[3]{2}e^{i\frac{4\pi}{3}},\sqrt[3]{2}$$

e

$$z_{4,5,6}=e^{i\frac{2\pi}{3}},e^{i\frac{4\pi}{3}},1.$$

□

Studio della funzione integrale.

Determinare estremi relativi ed intervalli di monotonia delle funzioni

$$f(x):=\int_{-10}^{x}e^{-t^2}dt$$

$$g(x):=\int_{0}^{x}|\log(t+1)-e^2|dt$$

$$h(x):=\int_{0}^{x^3}te^{t+1}-1dt$$

Integrali immediati.

Determinare i seguenti integrali definiti

- $\int_0^2 e^{3x}-x^2+5\sin xdx$
- $\int_{-3}^2 |e^{3x}-1|+7x^2dx$
- $\int_{-2}^3 x|x^2-1|dx$

Integrazione per parti.

Utilizzando la tecnica di integrazione per parti, calcolare i seguenti integrali

- $\int_1^2 x \log x dx$
- $\int_0^\pi x \sin x dx$
- $\int_{-\pi}^{\pi} (x+1)^2 \cos(x) dx$

Esempio. Per calcolare l'integrale

$$\int_1^2 x^3 \log(2x) dx$$

osserviamo che, posto $f(x) = \frac{x^4}{4}$ e $g(x) = \log(2x)$, abbiamo

$$\begin{aligned}\int x^3 \log(2x) &= \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx \\ &= \frac{x^4}{4}\log(2x) - \int \frac{x^4}{4x}dx = \frac{x^4}{4}\log(2x) - \frac{x^4}{16} + c\end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$. In particolare, $F(x) = \frac{x^4}{4}\log(2x) - \frac{x^4}{16}$ è una primitiva di $x^3 \log(2x)$ e quindi

$$\int_1^2 x^3 \log(2x) dx = F(2) - F(1) = 4\log(4).$$

□

Integrazione per sostituzione.

Utilizzando la tecnica di integrazione per sostituzione, calcolare i seguenti integrali

- $\int_1^2 \frac{1}{x} \log^5 x dx$
- $\int_0^\pi \tan x dx$
- $\int_{-1}^1 e^x \frac{1}{e^{2x}+1} dx$

Esempio. Per calcolare l'integrale

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \cos x^2 e^{\sin x^2} dx$$

consideriamo il cambio di variabile $t = \sin x^2$, in modo che $dt = 2x \cos x^2 dx$. Osservando che se $x = 0$ allora $t = 0$ e se $x = \sqrt{\pi/2}$ allora $t = \sin(\pi/2) = 1$, per il teorema di integrazione per sostituzione

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \cos x^2 e^{\sin x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^t dt = \frac{1}{2}(e^1 - e^0) = \frac{1}{2}(e-1).$$

□

Foglio 9

Integrali
(per sostituzione, parti e scomposizione in fratti semplici).

Calcolare i seguenti integrali indefiniti

- $\int \log(1+x^2)dx$
- $\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$
  (suggerimento: porre $t = \tan(x/2)$ e osservare che questo implica $x = 2\arctan t$)
- $\int arctan(x+2)dx$
- $\int -\frac{9x^3-27x^2+27x+1}{(x-3)^3\ (x^4+1)}dx$

Integrali impropri.

Studiare la convergenza (se lo si ritiene utile anche tramite lo studio della convergenza assoluta) dei seguenti integrali impropri

- $\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+e^x+1}dx$
- $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}dx$
- $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$
- $\int_0^1 \frac{\log(1+x^2)}{\arctan x}dx$

Esempio. Studiamo l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1-\cos x}{\sqrt{x^5}}dx.$$

Innanzitutto osserviamo che la funzione integranda è definita e continua in $(0,+\infty)$ (e in particolare in $(0,1]$) ed è positiva nell'intervallo di integrazione, quindi è integrabile in senso improprio in $[0,1]$. Per definizione abbiamo dunque

$$\int_0^1 \frac{1-\cos x}{\sqrt{x^5}}dx = \lim_{\omega\to 0^+}\int_\omega^1 \frac{1-\cos x}{\sqrt{x^5}}dx.$$

Resta da stabilre se il limite sopra è finito. Osserviamo che

$$\frac{1-\cos x}{\sqrt{x^5}} \sim \frac{x^2}{2\sqrt{x^5}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

e ricordiamo che la funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione: quindi possiamo applicare il criterio del confronto asintotico e ricondurre il problema allo studio dell'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx.$$

Per definizione di integrale improprio abbiamo

$$\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \lim_{\omega\to 0^+} \int_0^{\omega} \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \lim_{\omega\to 0^+} 1-\sqrt{\omega} = 1.$$

Quindi l'integrale $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ è convergente e per il criterio del confronto asintotico è convergente anche $\int_0^1 \frac{1-\cos x}{\sqrt{x^5}}dx$. $\square$

Equazioni differenziali al primo ordine lineari omogenee.

Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{t+1}x \\ x(0) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{t^2+1}x \\ x(1) = 4 \end{cases}$$

Un problema associato al modello Malthusiano.

Ricordiamo che nel modello di Malthus, il numero $x(t)$ di elementi di una popolazione al tempo t è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

(cioè x_0 è il numero di elementi della popolazione al tempo 0). Assumiamo il tasso di crescita a uguale a 2. Se al tempo $t = 1$ la popolazione è composta da e^6 elementi, quanti erano al tempo $t = 0$? In altre parole, quanto vale x_0?
(Risposta: $x_0 = e^4$).

Foglio 10

Equazioni differenziali ordinarie.

Dopo aver verificato le condizioni di esistenza e unicitá della soluzione, risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = 2x + t^2 + \sin t \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

[Suggerimento: utilizzare i metodi ad hoc per la ricerca di una soluzione particolare osservando che se $\tilde{x}_1$ è soluzione particolare di $x' = 2x + t^2$ e $\tilde{x}_2$ è soluzione particolare di $x' = 2x + \sin t$ allora $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_1(t) + \tilde{x}_2(t)$ è soluzione particolare di $x' = 2x + t^2 + \sin t$.]

$$\begin{cases} x' = (\cos t)x + \cos t \\ x(1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \cos^2 x(1 + 2t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' + 2x' + x - t^2 = 0 \\ x'(0) = x(0) = 0. \end{cases}$$

[Suggerimento: utilizzare i metodi ad hoc per la ricerca di una soluzione particolare]

$$\begin{cases} x'' + x = \tan t \\ x'(0) = x(0) = 0. \end{cases}$$

[Suggerimento: osservare che a questo caso non si applicano i metodi ad hoc per la ricerca di una soluzione particolare, usare quindi il metodo della variazione delle costanti]

Equazione logistica.

Verificare che la soluzione $x(t)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = (1 - 3x)x \\ x(0) = 1/6 \end{cases}$$

tende alla capacità ($K = 1/3$) per $t \to \infty$.

Oscillatore armonico.

Risolvere il problema di Cauchy associato all'oscillatore armonico

$$\begin{cases} x'' = -x \\ x'(0) = x(0) = 1 \end{cases}$$

e osservare che la soluzione è periodica. Osservare che se viene aggiunto un termine di attrito

$$\begin{cases} x'' = -x - x' \\ x'(0) = x(0) = 1 \end{cases}$$

allora la derivata della soluzione (cioè la velocità) tende a zero.

Domini di funzioni a due variabili.

Calcolare il dominio naturale delle seguenti funzioni e stabilire se è un insieme limitato, aperto, chiuso, nè aperto nè chiuso ed indicare i suoi punti di frontiera.

- $f(x, y) = e^{\frac{1}{x^2+y^2}}$
- $f(x, y) = \frac{1}{\log(|x^2-y|+1)}$
- $f(x, y) = \arctan(\sqrt{x + y})$
- $f(x, y) = \arctan(\sqrt[3]{x + y})$
- $f(x, y) = \arccos(x^2 + y^2 - 3)$
- $f(x, y) = \arccos(x + y - 3)$
- $f(x, y) = \tan(\frac{\pi x}{2y})$

Limiti di funzioni a due variabili.

Calcolare, se esistono i seguenti limiti

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos x + 2y - 1}{x^2 + y^2}$$

[Suggerimento: testare l'esistenza del limite con la restrizione $x = 0$]

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x + 2y) - 1}{x^2 + 4y^2 + 4xy}$$

[Suggerimento: osservare che il denominatore è il quadrato dell'argomento del coseno ed operare un opportuno cambio di variabile]

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{e^{x+y}}{x^2 + y^2}$$

[Suggerimento: testare l'esistenza del limite con le restrizioni $(0, y^2)$ e $(0, -y^2)$]

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{2|xy|}{e^{x^2+y^2}}$$

[Suggerimento: stimare $2|xy|$ con $x^2 + y^2$]

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{\sin^2(xy)}{x^2 + y^4}$$

[Suggerimento: usare il teorema del confronto]

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\sin^2(xy)}{x^2 + y^4 - 1}$$

[Suggerimento: testare l'esistenza del limite con opportune restrizioni del dominio]

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3y^2}{x^2 + y^2}$$

[Suggerimento: esprimere il limite in coordinate polari]

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y + xy^2}{e^{xy} - 1}$$

[Suggerimento: esprimere il limite in coordinate polari]

Foglio 11

Continuità, derivabilità e differenziabilità.

Esercizio 1.
Mostrare che la seguente funzione è differenziabile nell'origine

$$f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+3y^2}} \sin(x-3y)$$

Esercizio 2.
Mostrare che la seguente funzione

$$f(x,y) = |xy|^{\alpha}$$

è differenziabile nell'origine se e solo se $\alpha > 1/2$

Esercizio 3.
Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità delle seguenti funzioni

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\cos xy}{x^4+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\cos xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$h(x,y) = \begin{cases} x^2 \log \frac{x^4+3y^4}{x^4+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Piano tangente e derivate direzionali.

Esercizio 4.
Calcolare l'equazione del piano tangente (se esiste) al grafico della funzione $f(x,y)$ nel punto (x_0, y_0) dove:

- $f(x,y) = x^2 + xy$ e $(x_0, y_0) = (2,1)$;
- $f(x,y) = \log(x^2 + y^3)$ e $(x_0, y_0) = (2,3)$;
- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} + 2 & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 3 & \text{altrimenti} \end{cases}$
  e $(x_0, y_0) = (0,0)$.

Esercizio 5.
Sia $f(x,y) = x^2 + y^2$. Calcolare le direzioni $\bar{v}$ lungo le quali $D_{\bar{v}} f(1,1) = 0$.

[Suggerimento: ricordare che $D_{\bar{v}} f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \bar{v}$ quindi è sufficiente trovare i versori ortogonali a $\nabla f(1,1)$ (cioé tali che il loro prodotto scalare è nullo)]

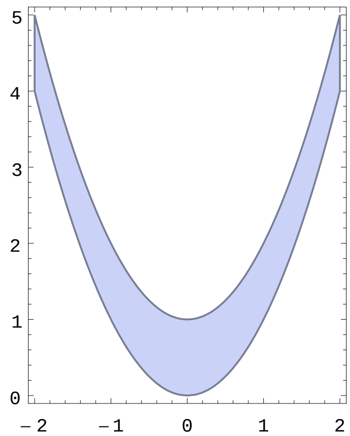


FIGURA 1. Rappresentazione grafica di K

Massimi e minimi di funzioni continue in domini compatti.

Disegnare il dominio $K \subset \mathbb{R}^2$ e calcolare i massimi e minimi assoluti della funzione $f(x, y)$ in K dove

- $f(x, y)) = x + y - 2\sqrt{xy}$ e $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 0; -1 \leq y \leq 0\}$
- $f(x, y)) = x^2 + y^2$ e $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid\| (x, y) \|\leq 1\}$;
- $f(x, y)) = x^2 + y^2$ e $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-2, 2], y \in [-2, 2]\}$;
- $f(x, y)) = x + y$ e $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-2, 2], x^2 \leq y \leq 4\}$;
- $f(x, y)) = x^2 + 2y$ e $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq\| (x, y) \|\leq 3\}$;

Esempio. Siano $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-2, 2], x^2 \leq y \leq x^2 + 1\}$ e $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. K è rappresentato graficamente in in Figura 1. Per studiare i punti di massimo e minimo consideriamo i seguenti casi:

(1) **Punti stazionari** Osserviamo che $f(x, y)$, in quanto somma e composizione di funzioni differenziabili, è differenziabile in $\mathring{K} \setminus \{(0, 0)\}$, dove $\mathring{K} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (-2, 2), x^2 < y < x^2 + 1\}$ rappresenta l'*interno* del dominio K (cioè il più grande insieme aperto contenuto in K). Calcoliamo il gradiente di $f(x, y)$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$$

e osserviamo che per ogni $(x, y) \in \mathring{K} \setminus \{(0, 0)\}$ il gradiente $\nabla f(x, y)$ è non nullo, quindi non ci sono punti stazionari in K.

(2) **Punti di non differenziabilità**: L'unico punto di non differenziabilità è $(0, 0)$ e non è interno a K.

(3) **Punti sulla frontiera**: La frontiera di K può essere decomposta in quattro sottoinsiemi (vedi Figura 1):

$$\partial K = \partial K_1 \cup \partial K_2 \cup \partial K_3 \cup \partial K_4$$

dove

$$\partial K_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2,\ y \in [4,5]\};$$

osserviamo che $4 = 2^2$ e $5 = 2^2 + 1$, cioè i valori minimi e massimi che può assumere y quando $x = 2$

$$\partial K_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -2,\ y \in [4,5]\};$$

$$\partial K_3 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-2,2],\ y = x^2\};$$

$$\partial K_3 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-2,2],\ y = x^2 + 1\}.$$

Osserviamo che ∂K_1, ∂K_2, ∂K_3 e ∂K_1 sono insiemi compatti e che la funzione f è ivi continua, quindi esistono i minimi e i massimi delle quattro restrizioni $f_{|\partial K_1}$, $f_{|\partial K_2}$,$f_{|\partial K_3}$ e $f_{|\partial K_4}$

- Studio di $f_{|\partial K_1}$. Abbiamo

$$f_{|\partial K_1}(x,y) = f(-2,y) = \sqrt{4+y^2} \quad \text{con } y \in [4,5]$$

Osserviamo che $g_1(y) = \sqrt{4+y^2}$ è una funzione monotona strettamente crescente in $[4,5]$ quindi i suoi punti di massimo e minimo corrisponderanno rispettivamente all'estremo sinistro e destro del dominio, cioè 4 e 5. Abbiamo quindi

$$f(-2,4) = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5} \tag{P1}$$

$$f(-2,5) = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}. \tag{P2}$$

- Studio di $f_{|\partial K_2}$. Abbiamo

$$f_{|\partial K_2}(x,y) = f(-2,y) = \sqrt{4+y} = f(2,y) = f_{|\partial K_1}(x,y)$$

(con $y \in [4,5]$) quindi abbiamo gli stessi massimi e minimi di $f_{|\partial K_1}(x,y)$, stavolta peró in corrispondenza di valori $x = 2$.

$$f(2,4) = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5} \tag{P3}$$

$$f(2,5) = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}. \tag{P4}$$

- Studio di $f_{|\partial K_3}$. Abbiamo

$$f_{|\partial K_3}(x,y) = f(x,x^2) = \sqrt{x^2+x^4} =: g_3(x) \quad \text{con } x \in [-2,2]$$

Dobbiamo quindi studiare i massimi e minimi della funzione di una variabile $g_3(x)$ nell'intervallo $[-2,2]$: per il Teorema di Fermat (per funzioni in una variabile) è sufficiente confrore il della funzione nei punti critici (non ci sono nell'intervallo $[-2,2]$ perchè $g_3'(x) = (x + 2x^3)/\sqrt{x^2+x^4}$ non è mai nulla in $[-2,2] \setminus \{0\}$ e non esiste in 0), nei punti non derivabili (cioè nel punto $x = 0$), e nei punti di frontiera (cioè $x = \pm 2$, ma questi casi corrispondono ai punti in K $(2,2^2)$ e $(-2,(-2)^2)$ e sono stati già trattati nelle equazioni (P1) e (P3). Da questa analisi otteniamo quindi solo il caso $(x,y) = (0,0)$ e cioè il valore

$$f(0,0) = g_3(0) = \sqrt{0^2+0^4} = 0 \tag{P5}$$

(15)

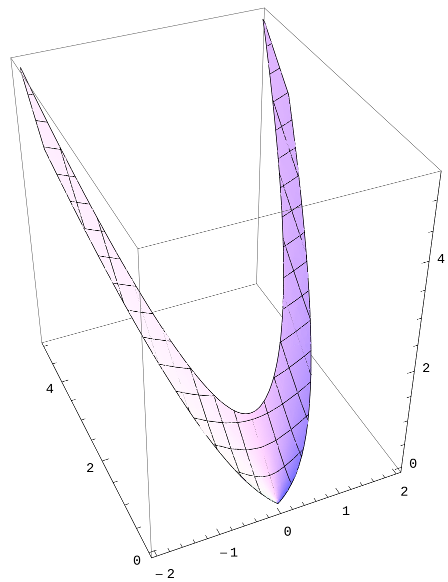


FIGURA 2. Grafico di $f(x,y)$ con dominio K

- Studio di $f_{|\partial K_3}$. Abbiamo

$$f_{|\partial K_3}(x,y) = f(x, x^2+1) = \sqrt{1+3x^2+x^4} =: g_4(x) \quad \text{con } x \in [-2,2]$$

Dobbiamo quindi studiare i massimi e minimi della funzione di una variabile $g_4(x)$ nell'intervallo $[-2,2]$: per il Teorema di Fermat (per funzioni in una variabile) è sufficiente confrore il della funzione nei punti critici (il solo punto critico è $x=0$ perchè $g_4'(x) = (x(3+2x^2))/\sqrt{1+3x^2+x^4})$, nei punti non derivabili (non esistono perchè g_4 è derivabile in $\mathbb{R}$), e nei punti di frontiera (cioè $x=\pm 2$, ma questi casi corrispondono ai punti in K $(2, 2^2+1)$ e $(-2, (-2)^2+1)$ e sono stati già trattati nelle equazioni (P2) e (P4)). Da questa analisi otteniamo quindi solo il caso $(x,y) = (0, 0^2+1)$ e cioè il valore

$$f(0,1) = g_4(0) = \sqrt{0^2+0^4+1} = 1 \tag{P6}$$

Confrontando i valori ottenuti nelle equazioni (P1)–(P6) abbiamo che il minimo assoluto della funzione è 0 e il punto di minimo è $(0,0)$ mentre il massimo è $\sqrt{29}$ e i punti di massimo sono $(\pm 2, 5)$. Vedi anche la Figura 2). □

Derivate parziali di ordine superiore e matrice Hessiana.

Calcolare la matrice Hessiana della funzione $f(x,y)$ e i suoi autovalori nel punto $(0,0)$ e nel punto $(1,0)$ dove

- $f(x,y) = x^3 + 2x^2y$
- $f(x,y) = \cos(\pi xy)$
- $f(x,y) = x^4 + y^4 + 1$
- $f(x,y) = e^{3x^2+y} + y\sin(\pi x) + 1$

Foglio 11

Studio di punti critici di funzioni di due variabili.

Determinare punti di massimo e minimo relativo e (se esistono) assoluti di $f(x, y)$ nel dominio X dove

- $f(x, y) = e^{x^2+y}$ e $X = \mathbb{R}^2$
- $f(x, y) = e^{x^2+y}$ e X è il quadrato di lato 2 centrato nell'origine.
- $f(x, y) = e^{x^2+y}$ e X è il cerchio di raggio 2 centrato nell'origine.
- $f(x, y) = x^3 + 6x^2 + 3x + y^3 - 2y^2 + y$ e $X = \mathbb{R}^2$
- $f(x, y) = xy(x + y)$ e $X = \mathbb{R}^2$
- $f(x, y) = xy(x + y)$ e $X = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, -x \leq y \leq -x + 1\}$.

Domini normali.

Esercizio 1 Dimostrare che il dominio Ω è un dominio normale dove

- $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 1\}$, cioè Ω è un'ellisse.
- Ω è il trapezio isoscele di con vertici $(-2, 0), (2, 0), (-1, 1), (1, 1)$
- Ω è il cerchio di raggio 2
- Ω è il triangolo di vertici $(0, 0), (1, 1), (1, 2)$

Esercizio 2 Dopo aver disegnato il dominio Ω, calcolare l'integrale doppio $\int_\Omega f$ dove

- $\Omega = [2, 3] \times [-1, 1]$ e $f(x, y) = xe^{x^2+y}$
- $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-2, 2], x^2 \leq y \leq x^2 + 1\}$ e $f(x, y) = \frac{x}{x+y}$

Esercizio 3 Tramite il calcolo dell'integrale $\int_{B_r(0,0)} 1$ dove $B_r(0, 0)$ è la palla di raggio r centrata nell'origine, dimostrare che l'area del cerchio di raggio r è πr^2.