Programma del corso di Analisi Matematica I

Canale I - Anno Accademico 2018/19
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica e Automatica
Sapienza Università di Roma

Concetti di base: Elementi di teoria degli insiemi: insiemi, operazioni insiemistiche fondamentali e loro proprietà, formule di De Morgan, prodotto cartesiano. Insiemi numerici: naturali $\mathbb{N}$, interi $\mathbb{Z}$, razionali $\mathbb{Q}$ e loro proprietà algebriche. Densità di $\mathbb{Q}$. Irrazionalità di $\sqrt{2}$ (con dimostrazione). Ordinamenti decimali, definizione dei numeri reali. Definizione di intervallo e di retta estesa. Intervalli chiusi e aperti, proprietà della loro intersezione. Definizione di valore assoluto, diseguaglianza triangolare (con dimostrazione), diseguaglianza di Cauchy-Schwarz (con dimostrazione) e diseguaglianza di Young. Sommatorie. Principio di induzione. Maggioranti, minoranti,massimo e minimo di un insieme. Unicità del massimo e del minimo. Estremo superiore ed inferiore. Assioma di completezza ed esistenza di sup ed inf per insiemi reali. Definizione di radice n-ma, esponenziale, logaritmo.

Funzioni a variabile reale: Definizione di funzione, dominio, codominio, grafo, immagine. Definizione di funzioni iniettiva, suriettiva, biunivoca. Definizione di dominio naturale. Definizione, dominio, immagine, grafico qualitativo, proprietà di monotonia delle funzioni elementari: funzioni polinomiali, razionali, trigonometriche, logaritmiche, esponenziali, iperboliche. Definizione di funzione identità, restrizione, proiezione, successioni. Composizione di funzioni e loro dominio naturale. La composizione di funzioni non è commutativa (lo studente dovrà essere in grado di fornire controesempi a supporto di questa affermazione). Funzione inversa, inversa di funzioni ristrette ad un sottoinsieme del dominio. Inverse trigonometriche: funzione arcoseno, arcoseno, arcotangente. Funzioni monotone, relazione tra monotonia e invertibilità. Somma, prodotto, inversa, composizione di funzioni monotone, funzioni pari, dispari, periodiche.

Calcolo infinitesimale per funzioni di una variabile: Definizione di distanza, distanza euclidea, intorni sferici, intorni della retta estesa e loro proprietà. Definizione di punti di accumulazione, punti isolati. Teorema di Bolzano-Weierstrass. Definizione di proprietà che vale definitivamente. Definizione di limite, $\sin(x)$ non ammette limite (con dimostrazione), algebra dei limiti finiti. Definizione di limite destro e sinistro, teorema di esistenza del limite per funzioni monotone, algebra parziale dei limiti infiniti, gerarchia degli infiniti. Teorema del confronto, teorema di locale limitatezza, teorema della permanenza del segno, funzioni asintotiche, teorema di esistenza del limite per funzioni composte, limiti notevoli. Funzioni infinitesime, infinite, asintotiche. Ordini di infiniti e infinitesimi, simbolo di Landau "o piccolo", algebra degli "o piccolo". Cenni di topologia in $\mathbb{R}$: insiemi aperti, chiusi, frontiera, interno e chiusura di un insieme. Asintoti di una funzione a variabile reale.

Successioni e serie numeriche: Successioni, successioni convergenti, divergenti, irregolari. Principali risultati sulla convergenza di successioni: teorema del confronto, di permanenza del segno, di convergenza di successioni limitate e monotone, di limitatezza per successioni convergenti. Fattoriale, numero di Nepero, successioni delle somme parziali. Serie numeriche: serie convergenti, divergenti, irregolari. Condizione necessaria di convergenza (con dimostrazione e con un controesempio a scelta per mostrare che tale condizione non è sufficiente per la convergenza di una serie), regolarità delle serie a termini positivi. Divergenza di serie armonica generalizzata con esponente maggiore di 1. Serie armonica generalizzata, serie geometrica. Criteri di convergenza per serie a termini non-negativi: critario del confronto, del confronto asintotico, del rapporto, della radice per successioni. Somma della serie geometrica e della serie di Mengoli. Serie a termini generali, convergenza assoluta. La convergenza assoluta implica quella semplice (lo studente dovrà essere in grado di fornire un controesempio che mostri che l'implicazione opposta non è vera). Criterio di Leibnitz.

Funzioni di una variabile continue: Definizione di funzione continua in un punto, continuità a destra e sinistra. Funzioni di classe C^0, chiusura di C^0 rispetto ad alcune operazioni algebriche e rispetto alla composizione. Classificazione dei punti di discontinuità, caratterizzazione dei punti di discontinuità di funzioni monotone. Teoremi sulla continuità: teorema di esistenza degli zeri, teorema di esistenza di soluzioni di equazioni a termini continui (con dimostrazione), monotonia di funzioni invertibili e continue, valori intermedi, continuità della funzione inversa. Teorema di Weierstrass.

Calcolo differenziale per funzioni di una variabile: Rapporto incrementale, definizione di funzione derivabile in un punto, in un intervallo, funzione derivata. Caratterizzazione del segno della derivata di funzioni monotone. Interpretazione geometrica e interpretazione fisica (come velocità istantanea) della derivata in un punto. Continuità di funzioni derivabili (con dimostrazione). Continuità non implica derivabilità (lo studente dovrà mostrare un controesempio a supporto di questa affermazione). Punti di non derivabilità. Derivata destra e sinistra. Derivata di funzioni di base, principali regole di derivazione. Derivata della funzione inversa. Relazione tra derivabilità e monotonia (lo studente dovrà essere in grado di dimostrare che funzioni con derivata positiva sono strettamente crescenti, ma tramite un controesempio, che il viceversa non è vero). Punti stazionari, estremi locali, teorema di Fermat, caratterizzazione degli estremi locali di una funzione. Teorema di Rolle, Teorema di Lagrange. Derivate di ordine superiore. Derivata seconda e sua relazione con la convessità di una funzione, caratterizzazione punti di massimo e minimo relativi. Studio di funzioni a variabile reale. Sviluppi di Taylor con resto di Peano e sue applicazioni al calcolo di limiti. Sviluppi di Taylor con il resto di Lagrange. Serie di Taylor e suo raggio di convergenza per funzioni di base (cenni). Teorema di de l'Hopital.

Numeri complessi: Definizione del campo dei numeri complessi e di alcune opearzioni di base: inverso, modulo, coniugato, parte reale ed immaginaria. Notazione trigonometrica, formule di de Moivre, notazione esponenziale, radici complesse e loro applicazioni alla soluzione di equazioni nel campo dei complessi. Teorema fondamentale dell'algebra, radici di polinomi a coefficienti reali.

Calcolo integrale per funzioni di una variabile: Suddivisioni, somme inferiori, somme superiori, integrale di Riemann. Condizioni sufficienti di integrabilità, proprietà degli integrali. Teorema della media (con dimostrazione), definizione di valor medio, funzione integrale, teorema fondamentale del calcolo integrale (con dimostrazione). Studio della funzione integrale. Primitive, integrale indefinito, caratterizzazione dell'insieme delle primitive di una funzione, calcolo degli integrali definiti. Calcolo degli integrali: integrali immediati, integrazione per parti e per sostituzione, integrali di funzioni razionali, decomposizione di Hermite e in fratti semplici. Integralibilità in senso improprio. Criteri di convergenza per gli integrali impropri: criterio del confronto, confronto asintotico, confronto con serie numeriche. Convergenza assoluta, la convergenza non implica la convergenza assoluta.

Equazioni differenziali ordinarie: Introduzione ai modelli di crescita e ai modelli preda-predatore: modello di Malthus, equazione logistica, equazione di Lotka-Volterra. Equazioni differenziali ordinarie al primo e secondo ordine: definizione, prime classificazioni, problema di Cauchy. Soluzioni di equazioni lineari al primo ordine omogenee e soluzione del problema di Cauchy associato. Metodi per equaziondi differenziali ordinarie lineari al primo ordine: variazione delle costanti e metodi ad hoc per la ricerca di una soluzione particolare. Equazioni differenziali a variabili separabili e problema di Cauchy associato: teorema di esistenza e unicità delle soluzioni. Equazioni differenziali ordinarie al secondo ordine lineari e problema di Cauchy associato. Teorema esistenza e unicit delle soluzioni. Soluzioni di equazioni a coefficienti costanti: metodo della variazione delle costanti e metodi ad hoc per la ricerca di una soluzione particolare.

Funzioni a più variabili: Elementi di topologia in $\mathbb{R}^n$: intorni sferici, richiami su insiemi aperti, chiusi, frontiera di un insieme, insiemi illimitati, il simbolo ∞ , punti di accumulazione. Dominio naturale di funzioni in due variabili. Definizione di limite di funzione in due variabili e di funzione continua. Propriet dei limiti e delle funzioni continue. Teorema del confronto. Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza del limite. Calcolo dei limiti: cambio di variabile, applicazioni del teorema del confronto, cambio di coordinate, coordinate polari. Successioni e sottosuccessioni in $\mathbb{R}^2$: criterio di Cauchy, teorema ponte per i limiti di funzioni a variabili reali. Insiemi compatti, teorema di Weierstrass in $\mathbb{R}^2$. Derivate direzionali, derivate parziali, gradiente, proprietá elementari del gradiente. Differenziabilit, propriet funzioni differenziabili, teorema del differenziale totale. Interpretazione del gradiente come direzione di massima crescita di una funzione a valori reali. Estremi di funzioni in due variabili, punti critici, teorema di Fermat. Derivate parziali di ordine superiore, funzioni due volte differenziabili, matrice hessiana, teorema di Schwarz. Gli autovalori della matrice hessiana di una funzione due volte differenziabile sono reali. Matrici definite positive e loro caratterizzazione tramite gli autovalori (cenni). Teorema di caratterizzazione dei punti critici di funzioni in due variabili e applicazioni alla ricerca di estremi assoluti e relativi di una funzione continua su un compatto.

Integrazione di funzioni a più variabili: Integrali doppi: definizione, prime propriet. Formule di riduzione per domini rettangolari. Integrali su domini generali. Domini semplici. Misura di un dominio semplice. Formule di riduzione per domini semplici. Insiemi di misura nulla: definizione ed esempi:

grafici di funzioni integrabili e unioni numerabili di insiemi di misura nulla hanno misura nulla. Matrice Jacobiana, cambiamento di coordinate negli integrali doppi. Coordinate polari.