

ISTRUZIONI

1. Il tempo della prova è di tre ore.
 2. **Non è ammesso l'uso di appunti, libri e calcolatrici.**
-

Esercizio 1 (4 punti)

Calcolare il seguente limite usando gli sviluppi di Taylor

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 - \frac{1}{2}x^2)}{3x + \frac{5}{2}x^2 - \frac{\tan(3x^2)}{x}}.$$

.....

Esercizio 2 (5 punti)

Data la funzione

$$f(x) = e^{-\log\left(\frac{3x-6}{x^2+4x-5}\right)},$$

determinarne l'insieme di definizione; studiare la continuità di $f(x)$ nel suo insieme di definizione, calcolare i limiti agli estremi del dominio, eventuali punti di non derivabilità, eventuali massimi e minimi relativi. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

.....

Esercizio 3 (4 punti)

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{k^3} \log(k+1)}.$$

.....

Esercizio 4 (4 punti)

Calcolare il seguente integrale

$$\int_{\Omega} xy \, dx \, dy,$$

dove $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, x-1 < y < x^2\}$.

.....

Esercizio 5 (4 punti)

Studiare continuità in $(0,0)$ della funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{\frac{xy^6}{x^3+y^9}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

.....

Domanda 1 (4 punti) Scrivere la definizione di limite di una funzione con dominio $X \subseteq \mathbb{R}$ e codominio $\mathbb{R}$.

.....

Domanda 2 (2 punti) Dimostrare che il seguente problema di Cauchy ammette un'unica soluzione in $\mathbb{R}^+$ (senza calcolarla)

$$\begin{cases} y' = \log(x)y + \arctan(x+2) \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

.....

Domanda 3 (3 punti) Applicando il principio di induzione, mostrare che l'affermazione " $n! > 2^{n+1}$ per ogni $n \geq 1$ " è falsa