1 - Determinare l'insieme di convergenza della serie $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k^2-1}(\log x - 2)^k\,, \quad x > 0\,.$

...

Posto $y = \log x - 2$, la serie assegnata può essere scritta come una serie di potenze, precisamente $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k^2-1} y^k$. Per determinare il raggio di convergenza di tale serie di potenze, si osservi che

$$\frac{\sqrt{k+1}}{(k+1)^2-1}\,\frac{k^2-1}{\sqrt{k}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1\,,$$

e di conseguenza il raggio di convergenza della serie $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k^2-1} y^k$ è 1. Pertanto, la serie assegnata converge per $|\log x - 2| < 1$, cioè per $e < x < e^3$.

Inoltre, la serie $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k^2-1}$ converge per il criterio del confronto asintotico, in quanto ha lo stesso carattere della serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$; di conseguenza la serie $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \frac{\sqrt{k}}{k^2-1}$ è assolutamente convergente, e quindi convergente.

In conclusione, l'insieme di convergenza della serie assegnata è l'intervallo $[e, e^3]$.

---

2 - Data la funzione $\quad f(x,y) = x^2 + y^2 + x - y$

(i) determinare e classificare i punti critici di f.

(ii) Determinare, se esistono, il massimo assoluto e il minimo assoluto di f nell'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \le e^2\}$.

...

(i) Si osservi che $\nabla f(x,y) = (2x+1, 2y-1)$, e quindi l'unico punto critico di f è $(-1/2, 1/2)$. Poiché $f_{xx}(x,y) = 2$, $f_{xy}(x,y) = 0$ e $f_{yy}(x,y) = 2$, è facile verificare che la matrice hessiana $D^2 f(-1/2, 1/2)$ è definita positiva, e quindi $(-1/2, 1/2)$ è un punto di minimo relativo per f.

(ii) La funzione f è continua in D, insieme chiuso e limitato di $\mathbf{R}^2$, e quindi per il teorema di Weierstrass f ha minimo assoluto e massimo assoluto in D.

Lo studio di f sulla circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio e comporta lo studio della funzione

$$g(\theta) := f(e\cos\theta, e\,\mathrm{sen}\,\theta) = e^2 + e\cos\theta - e\,\mathrm{sen}\,\theta\,, \quad \theta \in [0, 2\pi]\,,$$

$$g'(\theta) = -e\,\mathrm{sen}\,\theta - e\cos\theta = 0 \qquad \text{se e solo se} \quad \mathrm{tg}\,\theta = -1\,, \quad \theta = \frac{3\pi}{4}\,, \frac{7\pi}{4}\,.$$

In conclusione, confrontando i valori $f(e,0) = g(0) = e^2 + e$, $f\Big(-\frac{e}{\sqrt{2}}, \frac{e}{\sqrt{2}}\Big) = g\Big(\frac{3\pi}{4}\Big) = e^2 - e\sqrt{2}$, $f\Big(\frac{e}{\sqrt{2}}, -\frac{e}{\sqrt{2}}\Big) = g\Big(\frac{7\pi}{4}\Big) = e^2 + e\sqrt{2}$ e $f\Big(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big) = -\frac{1}{2}$, si ha che il massimo assoluto è $e^2 + e\sqrt{2}$ e il minimo assoluto è $-\frac{1}{2}$.

---

3 - Calcolare

$$\iiint_\Omega (z - y^2)\; dx\,dy\,dz$$

dove $\Omega = \big\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \le z \le 3\big\}$.

...

Per la formula di cambiamento di variabili in coordinate cilindriche si ha

$$\iiint_\Omega (z - y^2)\; dx\,dy\,dz = \iiint_D (z - \rho^2\,\mathrm{sen}^2\,\phi)\rho\; d\rho\,d\phi\,dz\,,$$

dove $D = \big\{(\rho,\phi,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ 0 \le \phi \le 2\pi\,, 0 \le z \le 3\,, 0 \le \rho \le \sqrt{z}\big\}$. Pertanto, per la formula di riduzione su domini semplici si ha

$$\iiint_D (z - \rho^2\,\mathrm{sen}^2\,\phi)\rho\; d\rho\,d\phi\,dz = \int_0^3 \int_0^{\sqrt{z}} \int_0^{2\pi} (z\rho - \rho^3\,\mathrm{sen}^2\,\phi)\; d\phi\,d\rho\,dz = \pi \int_0^3 \int_0^{\sqrt{z}} (2z\rho - \rho^3)\; d\rho\,dz\,,$$

poiché $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2\,\phi\; d\phi = \pi$. Si osservi ora che

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{z}} (2z\rho - \rho^3)\; d\rho\,dz = \int_0^3 \Big[z\rho^2 - \frac{\rho^4}{4}\Big]_0^{\sqrt{z}} dz = \int_0^3 \Big(z^2 - \frac{z^2}{4}\Big)\,dz = \frac{3}{4}\int_0^3 z^2\,dz = \frac{27}{4}\,,$$

e quindi

$$\iiint_\Omega (z - y^2)\ dx\, dy\, dz = \frac{27}{4}\pi\,.$$

4 - Determinare, se esistono, le soluzioni definite in tutto $\mathbf{R}$ dell'equazione differenziale

$$y' = y \operatorname{sen} x + y^2 \operatorname{sen}(2x)\,.$$

. . . .

L'equazione differenziale assegnata è di tipo Bernoulli e ammette la soluzione banale $y = 0$. Posto $z = y^{-1}$, l'equazione assegnata si trasforma nell'equazione lineare

$$z' = -z \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(2x)\,.$$

L'integrale generale dell'omogenea associata è dato da

$$z(x) = Ce^{\cos x} \qquad C \in \mathbf{R}\,.$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione completa, si deve calcolare

$$\int e^{-\cos x} \operatorname{sen}(2x)\ dx\,.$$

Integrando per parti si ha

$$\int e^{-\cos x} \operatorname{sen}(2x)\ dx = 2\int D(e^{-\cos x}) \cos x\ dx = 2e^{-\cos x}\cos x + 2\int e^{-\cos x} \operatorname{sen} x\, dx = 2e^{-\cos x}(\cos x + 1)\,,$$

da cui segue che l'integrale generale dell'equazione completa in z è dato da

$$z(x) = Ce^{\cos x} - 2(\cos x + 1) \qquad C \in \mathbf{R}\,.$$

Si noti che per ogni $C \in \mathbf{R}$ la funzione z è periodica di periodo 2π, e quindi per studiare l'esistenza di eventuali zeri di z basta restringere l'analisi all'intervallo $[0, 2\pi]$.
Si osservi ora che se $C < 0$ si ha $z(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Nel caso $C = 0$ si ha $z(x) = -2(\cos x + 1)$, e quindi $z(\pi) = 0$. Infine, se $C > 0$, grazie alla disuguaglianza notevole $e^t \geq t + 1$, si ha

$$z(x) = Ce^{\cos x} - 2(\cos x + 1) \geq (C - 2)(\cos x + 1)\,,$$

e quindi per $C > 2$ si ha $z(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Se $C = 2$ si ha $z(x) = 2(e^{\cos x} - \cos x - 1)$, e quindi $z(\pi/2) = z(3\pi/2) = 0$. Infine, se $C < 2$ si ha $z(\pi/2) = C - 2 < 0$ e $z(\pi) = Ce^{-1} > 0$, e quindi per il teorema degli zeri esiste $x_0 \in\,]\pi/2, \pi[$ tale che $z(x_0) = 0$.
In conclusione, le soluzioni definite in tutto $\mathbf{R}$ dell'equazione di Bernoulli assegnata sono date da

$$y(x) = \frac{1}{Ce^{\cos x} - 2(\cos x + 1)} \qquad \text{se} \quad C < 0 \quad \text{oppure se} \quad C > 2\,.$$

5 - Calcolare la serie di Fourier della funzione 2π-periodica che in $[-\pi, \pi]$ coincide con

$$f(x) = \min\{x, 0\}$$

e dire quanto vale la sua somma.

Utilizzando la prima parte dell'esercizio, determinare la somma della serie numerica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

. . . .

I coefficienti di Fourier sono dati da

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} t\ dt = -\frac{\pi}{2}\,,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} t\cos(kt)\ dt = \frac{1}{k\pi}\Big[t \operatorname{sen}(kt)\Big]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{0} \operatorname{sen}(kt)\ dt = \frac{1-(-1)^k}{k^2\pi}\,, \qquad k \in \mathbf{N}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} t \operatorname{sen}(kt)\ dt = -\frac{1}{k\pi}\Big[t\cos(kt)\Big]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{0} \cos(kt)\ dt = \frac{(-1)^{k+1}}{k}\,, \qquad k \in \mathbf{N}\,.$$

Detta g la funzione 2π-periodica tale che $g(x) = f(x)$ in $[-\pi, \pi]$, è chiaro che g è regolare a tratti. Pertanto, per il teorema sulla convergenza puntuale delle serie di Fourier per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$-\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(nx) = \frac{g(x^+) + g(x^-)}{2}\,.$$

In particolare, poiché g è continua in 0 e $g(0) = f(0) = 0$, si ha

$$-\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 0\,.$$

da cui segue

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$