1 - Determinare una serie di potenze la cui somma sia la funzione $f(x) = \log(1 - 5x)$ in un opportuno intervallo.

....

Grazie all' espressione della serie di Taylor di $\log(1 + t)$ si ha

$$\log(1 - 5x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^{k+1}}{k+1} x^{k+1}, \qquad |x| < 1/5.$$

---

2 - Dire se la forma differenziale

$$\omega = (3xy^2 + 5y \operatorname{sen} x)dx + (3yx^2 - 5\cos x + e^{2y})dy$$

è esatta nel suo dominio e, in caso affermativo, determinarne le funzioni potenziali.

....

Il dominio della forma differenziale assegnata $\omega = \langle F, dx \rangle$ è $\mathbf{R}^2$, dove il campo vettoriale $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ ha componenti $F_1(x, y) = 3xy^2 + 5y \operatorname{sen} x$ e $F_2(x, y) = 3yx^2 - 5\cos x + e^{2y}$.
In primo luogo si osservi che ω è chiusa in $\mathbf{R}^2$, in quanto

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = 6xy + 5 \operatorname{sen} x = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y).$$

Poiché $\mathbf{R}^2$ è semplicemente connesso, ω è anche esatta in $\mathbf{R}^2$. Una funzione potenziale U di ω deve verificare $\dfrac{\partial U}{\partial x} = F_1$ e $\dfrac{\partial U}{\partial y} = F_2$ in $\mathbf{R}^2$. Integrando $\dfrac{\partial U}{\partial x} = F_1$ rispetto a x, si ottiene

$$U(x, y) = \frac{3}{2}x^2y^2 - 5y\cos x + C(y),$$

dove $C(y)$ è una funzione, in generale, della sola variabile y. Derivando rispetto a y e imponendo l'uguaglianza con F_2 si ha

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 3x^2y - 5\cos x + C'(y) = 3yx^2 - 5\cos x + e^{2y},$$

da cui segue $C'(y) = e^{2y}$, cioè $C(y) = \dfrac{1}{2}e^{2y} + A$, $A \in \mathbf{R}$.
In conclusione, le funzioni potenziali di ω sono date da

$$U(x, y) = \frac{3}{2}x^2y^2 - 5y\cos x + \frac{1}{2}e^{2y} + A, \qquad A \in \mathbf{R}.$$

---

3 - Calcolare

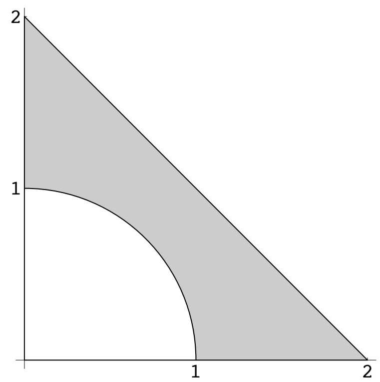
$$\iint_\Omega 3xy^2 \; dx\,dy$$

dove $\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \;:\; x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \geq 1, x + y \leq 2\}$.

....

Si osservi che il dominio Ω può essere riguardato come unione di due domini semplici, precisamente

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \;:\; 0 \leq x \leq 1, \quad \sqrt{1 - x^2} \leq y \leq 2 - x\} \cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \;:\; 1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 2 - x\}.$$



Per la formula di riduzione su domini semplici si ha

$$\iint_\Omega 3xy^2\, dx\, dy = \int_0^1 x \int_{\sqrt{1-x^2}}^{2-x} 3y^2\, dy\, dx + \int_1^2 x \int_0^{2-x} 3y^2\, dy\, dx = \int_0^2 x(2-x)^3\, dx - \int_0^1 x(1-x^2)^{3/2}\, dx\,.$$

Si osservi ora che

$$\int_0^2 x(2-x)^3\, dx = \int_0^2 (8x - 12x^2 + 6x^3 - x^4)\, dx = \frac{8}{5}\,,$$

oppure integrando per parti

$$\int_0^2 x(2-x)^3\, dx = -\Big[x\frac{(2-x)^4}{4}\Big]_0^2 + \frac{1}{4}\int_0^2 (2-x)^4\, dx = -\Big[\frac{(2-x)^5}{20}\Big]_0^2 = \frac{32}{20} = \frac{8}{5}\,,$$

$$-\int_0^1 x(1-x^2)^{3/2}\, dx = \frac{1}{5}(1-x^2)^{5/2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{5}\,,$$

e di conseguenza

$$\iint_\Omega 3xy^2\, dx\, dy = \frac{7}{5}\,.$$

Si può giungere allo stesso risultato applicando la formula di Gauss-Green. Infatti,

$$\iint_\Omega 3xy^2\, dx\, dy = -\int_{\partial\Omega^+} xy^3\, dx = \int_0^2 t(2-t)^3\, dt - \int_0^{\pi/2} \cos t \operatorname{sen}^4 t\, dt = \frac{7}{5}\,.$$

---

4 - Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2-1}{x+1} & x > -1\,, \\ y(0) = \alpha\,, \end{cases} \tag{P}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$.
(i) Determinare la soluzione di (P).
(ii) Determinare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

. . . .

(i) L'equazione differenziale assegnata è a variabili separabili e ammette le soluzioni stazionarie $y = 1$ e $y = -1$. Separando le variabili e integrando, si ottiene

$$\int \frac{1}{y^2-1}\, dy = \int \frac{1}{x+1}\, dx$$

$$\int \frac{1}{y^2-1}\, dy = \frac{1}{2}\int \Big(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\Big)\, dy = \frac{1}{2}\log\Big|\frac{y-1}{y+1}\Big| + C\,, \qquad C \in \mathbf{R}$$

$$\log\Big|\frac{y-1}{y+1}\Big|^{1/2} = \log|x+1| + C\,, \qquad C \in \mathbf{R}\,;$$

di conseguenza

$$\Big|\frac{y-1}{y+1}\Big|^{1/2} = C|x+1|\,, \qquad C > 0\,,$$

$$\frac{y-1}{y+1} = C(x+1)^2\,, \qquad C \in \mathbf{R}\,,$$

$$y(x) = \frac{C(x+1)^2 + 1}{1 - C(x+1)^2}\,, \qquad C \in \mathbf{R}\,.$$

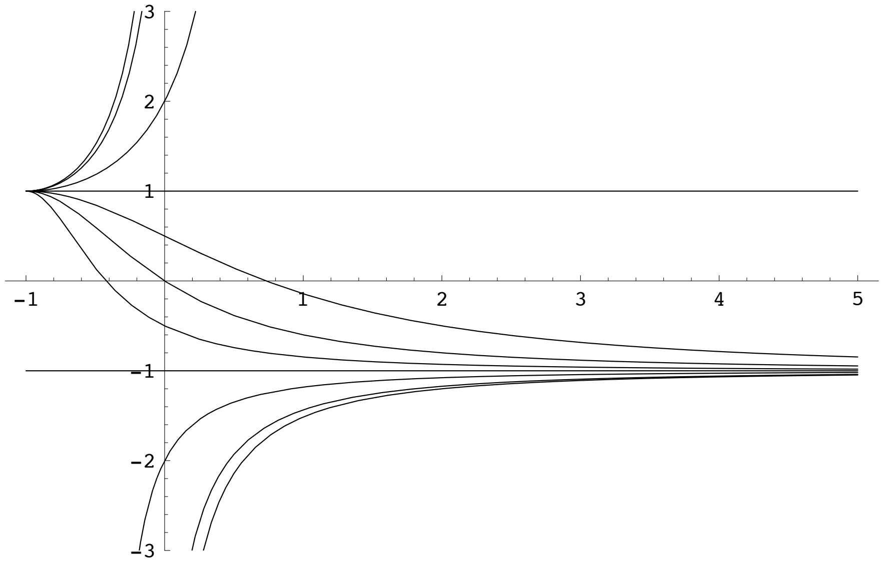
Imponendo la condizione iniziale $y(0) = \alpha$, $\alpha \neq \pm 1$, si ottiene

$$C = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}\,,$$

da cui segue che la soluzione del problema (P), definita in un opportuno intorno di 0, è data da

$$y(x) = \frac{(\alpha-1)(x+1)^2 + \alpha + 1}{\alpha + 1 - (\alpha-1)(x+1)^2}\,.$$

(ii) In primo luogo si osservi che per $\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1} < 0$, cioè per $-1 < \alpha < 1$, si ha $1 - \dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}(x+1)^2 > 0$, e quindi l'intervallo massimale di esistenza della soluzione $y(x)$ è $(-1, \infty)$. Invece, se $\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1} > 0$, cioè per $\alpha < -1$ o $\alpha > 1$, il denominatore della soluzione $y(x)$ si annulla nel punto $x_0 = \sqrt{\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}} - 1 > -1$. Si verifica facilmente che per $\alpha < -1$ si ha $x_0 < 0$, e quindi l'intervallo massimale di esistenza della soluzione $y(x)$ è (x_0, ∞), mentre per $\alpha > 1$ si ha $x_0 > 0$, e quindi l'intervallo massimale di esistenza della soluzione $y(x)$ è $(-1, x_0)$.
Grafici approssimativi delle soluzioni sono i seguenti.



5 - Data l'equazione

$$(y-1)e^{x^2-1} + (\pi - x)\cos(x+y-1) = 0$$

dimostrare che in un intorno del punto $(\pi, 1)$ individua una funzione implicita del tipo $x = g(y)$. Dire se $y = 1$ è punto di crescenza, decrescenza, minimo o massimo per g.

. . . .

La funzione $f(x,y) = (y-1)e^{x^2-1} + (\pi - x)\cos(x+y-1)$ è di classe C^∞ e $f(\pi, 1) = 0$. Le derivate parziali di f sono date da

$$f_x(x,y) = 2x(y-1)e^{x^2-1} - \cos(x+y-1) - (\pi - x)\,\mathrm{sen}(x+y-1)\,,$$

$$f_y(x,y) = e^{x^2-1} - (\pi - x)\,\mathrm{sen}(x+y-1)\,.$$

Poiché $f_x(\pi, 1) = 1 \neq 0$, per il teorema di Dini sulle funzioni implicite esiste una funzione implicita del tipo $x = g(y)$ definita in un intorno di 1. Inoltre, si ha

$$g'(1) = -\frac{f_y(\pi,1)}{f_x(\pi,1)} = -e^{\pi^2-1} < 0\,,$$

e quindi 1 è punto di decrescenza per g.