1 - Determinare l'insieme di convergenza della serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^7}{\pi^k}(e^x-4)^k$.

....

Posto $y = e^x - 4$, la serie assegnata è la serie di potenze $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^7}{\pi^k} y^k$. Per determinare il raggio di convergenza di tale serie di potenze, si osservi che

$$\frac{(k+1)^7}{\pi^{k+1}} \frac{\pi^k}{k^7} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\pi},$$

e di conseguenza il raggio di convergenza della serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^7}{\pi^k} y^k$ è π. Pertanto, la serie assegnata converge per $|e^x-4| < \pi$, cioè per $\log(4-\pi) < x < \log(4+\pi)$ e le serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^7$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k^7$ non convergono, perché non è verificata la condizione necessaria alla convergenza.
In conclusione, l'insieme di convergenza della serie assegnata è l'intervallo $(\log(4-\pi), \log(4+\pi))$.

---

2 - Data la funzione $\displaystyle f(x,y) = \frac{\cos(\pi x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\cos(\pi y)}{\sqrt{1-y^2}}$ determinare l'insieme di definizione e verificare che il punto $(0,0)$ è un punto di massimo relativo.

....

L'insieme di definizione di f è il quadrato $Q := (-1,1) \times (-1,1)$. Si osservi che

$$f_x(x,y) = -\pi \operatorname{sen}(\pi x)(1-x^2)^{-1/2} + x\cos(\pi x)(1-x^2)^{-3/2} \qquad (x,y) \in Q,$$

$$f_y(x,y) = -\pi \operatorname{sen}(\pi y)(1-y^2)^{-1/2} + y\cos(\pi y)(1-y^2)^{-3/2} \qquad (x,y) \in Q,$$

da cui segue che $\nabla f(0,0) = (0,0)$, e quindi $(0,0)$ è un punto critico di f.
Poiché per ogni $(x,y) \in Q$ si ha

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) =& -\pi^2\cos(\pi x)(1-x^2)^{-1/2} - \pi x \operatorname{sen}(\pi x)(1-x^2)^{-3/2} + \cos(\pi x)(1-x^2)^{-3/2} \\ & - \pi x \operatorname{sen}(\pi x)(1-x^2)^{-3/2} + 3x^2\cos(\pi x)(1-x^2)^{-5/2} \\ =& -\pi^2\cos(\pi x)(1-x^2)^{-1/2} - 2\pi x \operatorname{sen}(\pi x)(1-x^2)^{-3/2} + \cos(\pi x)(1-x^2)^{-3/2} + 3x^2\cos(\pi x)(1-x^2)^{-5/2}, \end{aligned}$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 0,$$

$$f_{yy}(x,y) = -\pi^2\cos(\pi y)(1-y^2)^{-1/2} - 2\pi y \operatorname{sen}(\pi y)(1-y^2)^{-3/2} + \cos(\pi y)(1-y^2)^{-3/2} + 3y^2\cos(\pi y)(1-y^2)^{-5/2},$$

segue che $f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = 1 - \pi^2 < 0$. Pertanto è facile verificare che la matrice hessiana $D^2 f(0,0)$ è definita negativa, e quindi $(0,0)$ è un punto di massimo relativo per f.

---

3 - Calcolare l'integrale $\displaystyle\iint_D e^{|x^2+y^2-9|}\,dx\,dy$ dove D è la semicorona circolare di ascisse non negative avente come centro l'origine e raggi 2 e 4.

....

Per la formula di cambiamento di variabili in coordinate polari si ha

$$\iint_D e^{|x^2+y^2-9|}\,dx\,dy = \iint_T \rho\, e^{|\rho^2-9|}\,d\rho\,d\phi,$$

dove $T = \{(\rho,\phi) \in \mathbf{R}^2 \; : \; -\pi/2 \le \phi \le \pi/2, 2 \le \rho \le 4\}$. Pertanto, per la formula di riduzione su domini semplici si ha

$$\iint_T \rho\, e^{|\rho^2-9|}\,d\rho\,d\phi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \int_2^4 \rho\, e^{|\rho^2-9|}\,d\rho = \pi e^9 \int_2^3 \rho\, e^{-\rho^2}\,d\rho + \pi e^{-9}\int_3^4 \rho\, e^{\rho^2}\,d\rho.$$

Si osservi ora che

$$\int_2^3 \rho\, e^{-\rho^2}\,d\rho = -\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\Big|_2^3 = \frac{e^{-4}-e^{-9}}{2},$$

$$\int_3^4 \rho\, e^{\rho^2}\,d\rho = \frac{1}{2}e^{\rho^2}\Big|_3^4 = \frac{e^{16}-e^{9}}{2},$$

e quindi

$$\iint_D e^{|x^2+y^2-9|}\,dx\,dy = \frac{\pi}{2}(e^5+e^7) - \pi.$$

4 - Data l'equazione differenziale dipendente dal parametro $\alpha \in \mathbf{R}$

$$y'' + \alpha y = 2x\,,$$

(i) determinare l'integrale generale al variare di α;
(ii) determinare, se esistono, i valori di α per i quali ogni soluzione $y(x)$ verifichi la condizione

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{y(x)}{x} = \pi\,.$$

. . . .

L'equazione assegnata è lineare del secondo ordine.
Se $\alpha = 0$ l'integrale generale è dato da

$$y(x) = \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2 \qquad C_1\,, C_2 \in \mathbf{R}\,,$$

e quindi per ogni soluzione $y(x)$ si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{y(x)}{x} = +\infty\,.$$

Se $\alpha > 0$ l'integrale generale è dato da

$$y(x) = C_1 \cos(\sqrt{\alpha}x) + C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha}x) + \frac{2}{\alpha}x \qquad C_1\,, C_2 \in \mathbf{R}\,,$$

e quindi ogni soluzione $y(x)$ verifica la condizione

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{y(x)}{x} = \pi$$

se e solo se $\frac{2}{\alpha} = \pi$, cioè $\alpha = \frac{2}{\pi}$. Nel caso $\alpha < 0$ l'integrale generale è dato da

$$y(x) = C_1 e^{-\sqrt{-\alpha}x} + C_2 e^{\sqrt{-\alpha}x} + \frac{2}{\alpha}x \qquad C_1\,, C_2 \in \mathbf{R}\,,$$

e quindi per ogni $C_1 \neq 0$ si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{y(x)}{x} = \operatorname{sign}(C_1)(+\infty)\,.$$

In conclusione, solo per $\alpha = \frac{2}{\pi}$ ogni soluzione $y(x)$ verifica la condizione

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{y(x)}{x} = \pi$$

---

5 - Calcolare la serie di Fourier della funzione 2π-periodica che in $[-\pi, \pi]$ coincide con

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \quad x \neq 0\,, \qquad f(0) = 1$$

e dire quanto vale la sua somma.

Utilizzando la prima parte dell'esercizio, determinare la somma della serie numerica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

. . . .

La funzione f è dispari. Pertanto i coefficienti di Fourier sono dati da

$$a_k = 0\,, \qquad k \in \mathbf{N} \cup \{0\}\,,$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(kt)\,dt = -\frac{2}{k\pi}\Big[\cos(kt)\Big]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^k}{k}\,, \qquad k \in \mathbf{N}\,.$$

Detta g la funzione 2π-periodica tale che $g(x) = f(x)$ in $[-\pi, \pi]$, è chiaro che g è regolare a tratti. Pertanto, per il teorema sulla convergenza puntuale delle serie di Fourier per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \operatorname{sen}((2n+1)x) = \frac{g(x^+) + g(x^-)}{2}\,.$$

In particolare, poiché g è continua in $\pi/2$ e $g(\pi/2) = f(\pi/2) = 1$, si ha

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \operatorname{sen}(\pi/2 + n\pi) = 1\,,$$

da cui, tenendo conto di $\operatorname{sen}(\pi/2 + n\pi) = (-1)^n$, segue

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}\,.$$