1 - Dire se la funzione $f(x) = e^{-x^4}$ è analitica e calcolare $f^{(100)}(0)$, $f^{(101)}(0)$ e $f^{(102)}(0)$.

....

In forza di

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \qquad t \in \mathbf{R}$$

e dell'unicità dello sviluppo in serie di potenze, si ha

$$e^{-x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{4n} \qquad x \in \mathbf{R}\,,$$

e quindi la funzione $f(x) = e^{-x^4}$ è analitica.

Inoltre, grazie all'espressione della serie di Taylor di f, si ha $f^{(100)}(0) = -\dfrac{(100)!}{(25)!}$ e $f^{(101)}(0) = f^{(102)}(0) = 0$.

---

2 - Data la funzione $f(x,y) = \max\{0, xy\}$ determinare, se esistono, il massimo assoluto e il minimo assoluto di f in $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

....

Per il teorema di Weierstrass la funzione continua f ammette massimo assoluto e minimo assoluto nell'insieme chiuso e limitato $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.
Posto $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $t \in [0, 2\pi]$, si deve determinare il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione $g(t) = \max\left\{0, \dfrac{\operatorname{sen}(2t)}{2}\right\}$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Pertanto è chiaro che $\max\limits_{[0,2\pi]} g(t) = g(\pi/4) = \dfrac{1}{2}$ e $\min\limits_{[0,2\pi]} g(t) = g(0) = 0$, da cui segue $\max\limits_{C} f(x,y) = f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = \dfrac{1}{2}$ e $\min\limits_{C} f(x,y) = f(1,0) = 0$.

---

3 - Calcolare l'integrale $\displaystyle\iint_D |y - \log x|\, dx\, dy$ dove $D = [1, e] \times [0, e]$.

....

Per la formula di riduzione su rettangoli si ha

$$\iint_D |\log x - y|\, dx\, dy = \int_1^e \left(\int_0^{\log x} (\log x - y)\; dy + \int_{\log x}^e (y - \log x)\; dy \right) dx = \int_1^e \left(\log^2 x + \frac{e^2}{2} - e \log x \right) dx\,.$$

In forza di

$$\int \log x \; dx = x \log x - x\,, \qquad \int \log^2 x \; dx = x \log^2 x - 2 \int \log x \; dx = x \log^2 x - 2x \log x + 2x\,,$$

si ha

$$\int_1^e \left(\log^2 x + \frac{e^2}{2} - e \log x \right) dx = \left[x \log^2 x - 2x \log x + 2x + \frac{e^2}{2} x - e x \log x + e x \right]_1^e = \frac{e^3 - e^2}{2} - 2\,.$$

In conclusione

$$\iint_D |\log x - y|\, dx\, dy = \frac{e^3 - e^2}{2} - 2\,.$$

---

4 - Data l'equazione differenziale dipendente dal parametro $\alpha \in \mathbf{R}$

$$y'' - \alpha y' + y = e^{3x}\,,$$

(i) determinare l'integrale generale al variare di α;
(ii) determinare, se esistono, i valori di α per i quali ogni soluzione $y(x)$ verifichi la condizione

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-\frac{x}{4}} y(x) = +\infty\,.$$

....

(i) L'equazione assegnata è lineare completa del secondo ordine.
Se $\alpha < -2$ o $\alpha > 2$, $\alpha \neq \dfrac{10}{3}$, l'integrale generale è dato da

$$y(x) = C_1 e^{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2} x} + C_2 e^{\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2} x} + \frac{e^{3x}}{10 - 3\alpha}\,, \qquad C_1\,, C_2 \in \mathbf{R}\,.$$

Se $\alpha = \dfrac{10}{3}$, l'integrale generale è dato da

$$y(x) = C_1 e^{\frac{x}{3}} + C_2 e^{3x} + \frac{3}{8} x e^{3x}\,, \qquad C_1\,, C_2 \in \mathbf{R}\,.$$

Nel caso $\alpha = -2$ l'integrale generale è dato da

$$y(x) = e^{-x}(C_1 + C_2 x) + \frac{e^{3x}}{16}\,, \qquad C_1\,, C_2 \in \mathbf{R}\,,$$

mentre se $\alpha = 2$ l'integrale generale è dato da

$$y(x) = e^{x}(C_1 + C_2 x) + \frac{e^{3x}}{4}\,, \qquad C_1\,, C_2 \in \mathbf{R}\,.$$

Infine, se $-2 < \alpha < 2$ l'integrale generale è dato da

$$y(x) = C_1 e^{\frac{\alpha}{2}x} \cos\Big(\frac{\sqrt{4-\alpha^2}}{2} x\Big) + C_2 e^{\frac{\alpha}{2}x} \operatorname{sen}\Big(\frac{\sqrt{4-\alpha^2}}{2} x\Big) + \frac{e^{3x}}{10-3\alpha}\,, \qquad C_1\,, C_2 \in \mathbf{R}\,.$$

(ii) Se $\alpha < -2$, si ha $\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4} < 0$, $\alpha - \sqrt{\alpha^2-4} < 0$ e $10 - 3\alpha > 0$, e quindi si ha

$$e^{-\frac{x}{4}} y(x) = C_1 e^{\left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4}}{2} - \frac{1}{4}\right)x} + C_2 e^{\left(\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-4}}{2} - \frac{1}{4}\right)x} + \frac{e^{\frac{11}{4}x}}{10-3\alpha} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\,, \qquad \forall C_1\,, C_2 \in \mathbf{R}\,.$$

Se $\alpha > 2$ e $10 - 3\alpha > 0$, cioè $2 < \alpha < 10/3$, si ha

$$e^{-\frac{x}{4}} y(x) = e^{\frac{11}{4}x}\Big[C_1 e^{\frac{\alpha-6+\sqrt{\alpha^2-4}}{2}x} + C_2 e^{\frac{\alpha-6-\sqrt{\alpha^2-4}}{2}x} + \frac{1}{10-3\alpha}\Big] \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\,, \qquad \forall C_1\,, C_2 \in \mathbf{R}\,,$$

in quanto $\alpha - 6 + \sqrt{\alpha^2-4} < 0$ per $\alpha < 10/3$.
Per $\alpha > 10/3$ si osservi che se $C_1 < 0$ e $C_2 \in \mathbf{R}$ si ha

$$e^{-\frac{x}{4}} y(x) = e^{\frac{11}{4}x}\Big[C_1 e^{\frac{\alpha-6+\sqrt{\alpha^2-4}}{2}x} + C_2 e^{\frac{\alpha-6-\sqrt{\alpha^2-4}}{2}x} + \frac{1}{10-3\alpha}\Big] \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty\,,$$

in quanto $\alpha - 6 + \sqrt{\alpha^2-4} > 0$ e $\alpha - 6 - \sqrt{\alpha^2-4} < 0$.
Se $\alpha = \dfrac{10}{3}$ si ha

$$e^{-\frac{x}{4}} y(x) = e^{\frac{11}{4}x}\Big[C_1 e^{-\frac{8}{3}x} + C_2 + \frac{3}{8}x\Big] \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\,, \qquad \forall C_1\,, C_2 \in \mathbf{R}\,.$$

Se $\alpha = -2$ si ha

$$e^{-\frac{x}{4}} y(x) = e^{-\frac{5}{4}x}(C_1 + C_2 x) + \frac{e^{\frac{11}{4}x}}{16} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\,, \qquad \forall C_1\,, C_2 \in \mathbf{R}\,.$$

Se $\alpha = 2$ si ha

$$e^{-\frac{x}{4}} y(x) = e^{\frac{11}{4}x}\Big[e^{-2x}(C_1 + C_2 x) + \frac{1}{4}\Big] \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\,, \qquad \forall C_1\,, C_2 \in \mathbf{R}\,.$$

Infine per $-2 < \alpha < 2$ si ha

$$e^{-\frac{x}{4}} y(x) = e^{\frac{11}{4}x}\Big[C_1 e^{\frac{\alpha-6}{2}x} \cos\Big(\frac{\sqrt{4-\alpha^2}}{2}x\Big) + C_2 e^{\frac{\alpha-6}{2}x} \operatorname{sen}\Big(\frac{\sqrt{4-\alpha^2}}{2}x\Big) + \frac{1}{10-3\alpha}\Big] \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\,, \qquad \forall C_1\,, C_2 \in \mathbf{R}\,.$$

In conclusione, la condizione $\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{x}{4}} y(x) = +\infty$ è verificata per $\alpha \le 10/3$.

---

5 - Calcolare la serie di Fourier della funzione 2π-periodica che in $[-\pi, \pi]$ coincide con

$$f(x) = \max\{1 - x, 1\}$$

e dire quanto vale la sua somma.

Utilizzando la prima parte dell'esercizio, determinare la somma della serie numerica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\,.$

. . . .

I coefficienti di Fourier di f sono dati da

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(1-t)\ dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\ dt = 2 + \frac{\pi}{2}\,,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(1-t)\cos(kt)\ dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(kt)\ dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kt)\ dt - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}t\cos(kt)\ dt = \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}\,, \qquad k \in \mathbf{N}\,,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(1-t)\,\mathrm{sen}(kt)\ dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\mathrm{sen}(kt)\ dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sen}(kt)\ dt - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}t\,\mathrm{sen}(kt)\ dt = \frac{(-1)^k}{k}\,, \qquad k \in \mathbf{N}\,.$$

Detta g la funzione 2π-periodica tale che $g(x) = f(x)$ in $[-\pi,\pi]$, è chiaro che g è regolare a tratti. Pertanto, per il teorema sulla convergenza puntuale delle serie di Fourier per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$1 + \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\,\mathrm{sen}(nx) = \frac{g(x^+) + g(x^-)}{2}\,.$$

In particolare, poiché g è continua in 0 e $g(0) = f(0) = 1$, si ha

$$1 + \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = 1\,,$$

da cui segue

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$