1 - Determinare una serie di potenze la cui somma sia la funzione $f(x) = \arctan(4x)$ in un opportuno intervallo.

. . . .

Grazie all'espressione della serie di Taylor della funzione $t \to \arctan t$ si ha

$$\arctan(4x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4^{2k+1}}{2k+1} x^{2k+1}\,, \qquad |x| < 1/4\,.$$

---

2 - Calcolare la lunghezza del grafico della funzione $f(x) = x^{3/2}$, $x \in [0, 2]$.

. . . .

La lunghezza del grafico di f è data da

$$\int_0^2 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\; dx = \frac{8}{27}\Big[\big(1 + \frac{9}{4}x\big)^{3/2}\Big]_0^2 = \frac{8}{27}\big(\big(\frac{11}{2}\big)^{3/2} - 1\big)\,.$$

---

3 - Calcolare

$$\iint_\Omega y|\cos x|^3 \; dx\, dy$$

dove $\Omega = \big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \;:\; 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \sqrt{\operatorname{sen} x}\,\big\}$.

. . . .

Per la formula di riduzione su domini semplici si ha

$$\iint_\Omega y|\cos x|^3 \; dx\, dy = \int_0^\pi |\cos x|^3 \int_0^{\sqrt{\operatorname{sen} x}} y\; dy\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi |\cos x|^3 \operatorname{sen} x\, dx\,.$$

Si osservi ora che

$$\int_0^\pi |\cos x|^3 \operatorname{sen} x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^3 x \operatorname{sen} x\, dx - \int_{\pi/2}^\pi \cos^3 x \operatorname{sen} x\, dx$$

e

$$\int \cos^3 x \operatorname{sen} x\, dx = -\frac{1}{4}\cos^4 x + c\,, \qquad c \in \mathbf{R}\,.$$

In conclusione

$$\iint_\Omega y|\cos x|^3 \; dx\, dy = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \operatorname{sen} x\, dx - \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^\pi \cos^3 x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{1}{4}\,.$$

---

4 - Data l'equazione differenziale

$$y' = 3y + 2x\,,$$

determinare, se esistono, i valori del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali ogni soluzione $y(x)$ verifichi la condizione

$$\lim_{x \to +\infty} e^{\alpha x} y(x) = 0\,.$$

. . . .

L'equazione differenziale assegnata è lineare del primo ordine. L'integrale generale dell'omogenea associata è dato da

$$y(x) = Ce^{3x}\,, \qquad C \in \mathbf{R}\,.$$

Un integrale particolare dell'equazione $y' = 3y + 2x$ è

$$\widetilde{y}(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{9}\,,$$

e di conseguenza l'integrale generale dell'equazione completa è dato da

$$y(x) = Ce^{3x} - \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}\,, \qquad C \in \mathbf{R}\,.$$

Infine, la condizione

$$\lim_{x \to +\infty} e^{\alpha x} y(x) = \lim_{x \to +\infty} \big(Ce^{(\alpha+3)x} - \frac{2}{3}xe^{\alpha x} - \frac{2}{9}e^{\alpha x}\big) = 0$$

è verificata per $\alpha < -3$.

---

5 - Determinare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - 2xy + 3y^2 - 5y$$

e classificarli.

....

Le derivate parziali di f sono date da

$$f_x(x,y) = x^2 - 2y\,,$$

$$f_y(x,y) = -2x + 6y - 5\,.$$

Il gradiente di f si annulla nei punti $(-1, 1/2)$ e $(5/3, 25/18)$, che sono, di conseguenza, i punti critici di f. Le derivate parziali seconde di f sono date da

$$f_{xx}(x,y) = 2x\,, \quad f_{xy}(x,y) = -2\,, \quad f_{yy}(x,y) = 6\,,$$

e di conseguenza $(-1, 1/2)$ è punto di sella e $(5/3, 25/18)$ è punto di minimo relativo.