

1. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto solo su questi fogli**.
2. **Non è ammesso l'uso di appunti, libri e calcolatrici.**

Esercizio 1.

Determinare la funzione f avente come serie di Taylor centrata in 0 la serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}}{k!} x^{3k}$.

Calcolare $f^{(50)}(0)$, $f^{(51)}(0)$ e $f^{(52)}(0)$.

.....
Esercizio 2.

Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2}{1 + y^2}$$

- (i) calcolare il gradiente e determinare eventuali punti critici di f ;
(ii) determinare, se esistono, il massimo assoluto e il minimo assoluto di f nell'insieme $D = [1, 2] \times [0, 1]$. Esiste il minimo assoluto di f in tutto il suo insieme di definizione?

.....
Esercizio 3.

Calcolare

$$\iint_{\Omega} x |e^{-x^2} - y| dx dy$$

dove $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$.

.....
Esercizio 4.

Data l'equazione differenziale dipendente dal parametro $\alpha \in \mathbf{R}$

$$y'' - 2y' + y = e^{\alpha x},$$

- (i) determinare l'integrale generale al variare di α ;
(ii) determinare, se esistono, i valori di α per i quali ogni soluzione $y(x)$ verifichi la condizione

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{\alpha}{2}x} y(x) = 0.$$

.....
Esercizio 5.

Calcolare la serie di Fourier della funzione 2π -periodica che in $[-\pi, \pi]$ coincide con

$$f(x) = \min\{1, x^2\}$$

e dire quanto vale la sua somma.

Utilizzando la prima parte dell'esercizio, determinare la somma della serie numerica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cos k - \sin k}{k^3}.$$

.....
Domanda 1. Definizione di curva rettificabile e di lunghezza di una curva.

.....
Domanda 2. Formule di Gauss-Green nel piano.