1 - Determinare la funzione f avente come serie di Taylor centrata in 0 la serie di potenze $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}}{k!} x^{3k}$. Calcolare $f^{(50)}(0)$, $f^{(51)}(0)$ e $f^{(52)}(0)$.

....

Grazie all'espressione della serie esponenziale si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}}{k!} x^{3k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4x^3)^k}{k!} = e^{4x^3} \qquad x \in \mathbf{R},$$

e quindi la funzione richiesta è

$$f(x) = e^{4x^3}.$$

Inoltre, grazie all'espressione della serie di Taylor di f, si ha $f^{(51)}(0) = (51)! \dfrac{4^{17}}{(17)!}$ e $f^{(50)}(0) = f^{(52)}(0) = 0$.

---

2 - Data la funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2}{1+y^2}$$

(i) calcolare il gradiente e determinare eventuali punti critici di f;
(ii) determinare, se esistono, il massimo assoluto e il minimo assoluto di f nell'insieme $D = [1,2] \times [0,1]$. Esiste il minimo assoluto di f in tutto il suo insieme di definizione?

....

(i) Il gradiente di f è

$$\nabla f(x,y) = \Big(\frac{2x}{1+y^2}, -\frac{2x^2 y}{(1+y^2)^2}\Big), \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2,$$

e di conseguenza i punti critici di f sono tutti e soli i punti della retta $x = 0$.
(ii) La funzione f è continua in D, insieme chiuso e limitato di $\mathbf{R}^2$, e quindi per il teorema di Weierstrass f ha minimo assoluto e massimo assoluto in D.
In primo luogo si osservi che non ci sono punti critici all'interno dell'insieme D, e di conseguenza i punti di minimo e massimo sono sul bordo di D. La funzione f assume sui lati del quadrato D i seguenti valori:

$$f(x,0) = x^2, \quad x \in [1,2], \qquad f(2,y) = \frac{4}{1+y^2}, \quad y \in [0,1],$$

$$f(x,1) = \frac{x^2}{2}, \quad x \in [1,2], \qquad f(1,y) = \frac{1}{1+y^2}, \quad y \in [0,1].$$

In conclusione, confrontando i valori che f assume nei quattro vertici del quadrato, cioè $f(1,0) = 1$, $f(2,0) = 4$, $f(2,1) = 2$ e $f(1,1) = \frac{1}{2}$, si ha che $\displaystyle\min_{(x,y)\in D} f(x,y) = \frac{1}{2}$ e $\displaystyle\max_{(x,y)\in D} f(x,y) = 4$.
Infine, si osservi che $\displaystyle\min_{(x,y)\in \mathbf{R}^2} f(x,y) = 0$, in quanto $f(x,y) \geq 0 = f(0,y)$, per ogni $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, e questo non è in contrasto con quanto ottenuto in precedenza, in quanto $(0,y) \notin D$, per ogni $y \in \mathbf{R}$.

---

3 - Calcolare

$$\iint_\Omega x\big|e^{-x^2} - y\big| \, dx\, dy$$

dove $\Omega = [0,1] \times [0,1]$.

....

Per la formula di riduzione su domini semplici si ha

$$\iint_\Omega x\big|e^{-x^2} - y\big| \, dx\, dy = \int_0^1 x\Big[\int_0^{e^{-x^2}} \big(e^{-x^2} - y\big)\, dy + \int_{e^{-x^2}}^1 \big(y - e^{-x^2}\big)\, dy\Big]\, dx.$$

Si osservi che

$$\int \big(e^{-x^2} - y\big)\, dy = e^{-x^2} y - \frac{y^2}{2},$$

e di conseguenza

$$\iint_\Omega x\big|e^{-x^2} - y\big| \, dx\, dy = \int_0^1 x\Big[e^{-x^2} y - \frac{y^2}{2}\Big]_0^{e^{-x^2}} dx - \int_0^1 x\Big[e^{-x^2} y - \frac{y^2}{2}\Big]_{e^{-x^2}}^1 dx = \int_0^1 x e^{-2x^2}\, dx - \int_0^1 x\Big(e^{-x^2} - \frac{1}{2}\Big)\, dx.$$

In conclusione

$$\iint_\Omega x\left|e^{-x^2} - y\right| \, dx\, dy = \left[-\frac{1}{4}e^{-2x^2} + \frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2e} - \frac{1}{4e^2}\,.$$

---

4 - Data l'equazione differenziale dipendente dal parametro $\alpha \in \mathbf{R}$

$$y'' - 2y' + y = e^{\alpha x}\,,$$

(i) determinare l'integrale generale al variare di α;
(ii) determinare, se esistono, i valori di α per i quali ogni soluzione $y(x)$ verifichi la condizione

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{\alpha}{2}x} y(x) = 0\,.$$

. . . .

(i) L'equazione differenziale assegnata è lineare del secondo ordine. L'integrale generale dell'omogenea associata è dato da

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x\,, \qquad C_1\,, C_2 \in \mathbf{R}\,.$$

Per ogni $\alpha \neq 1$ un integrale particolare dell'equazione assegnata è

$$\widetilde{y}(x) = \frac{e^{\alpha x}}{(\alpha-1)^2}\,,$$

e di conseguenza per ogni $\alpha \neq 1$ l'integrale generale dell'equazione completa è dato da

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{e^{\alpha x}}{(\alpha-1)^2}\,, \qquad C_1\,, C_2 \in \mathbf{R}\,.$$

Per $\alpha = 1$ l'integrale generale è dato da

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{1}{2}x^2 e^x\,, \qquad C_1\,, C_2 \in \mathbf{R}\,.$$

(ii) Per ogni $\alpha \neq 1$ la condizione

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{\alpha}{2}x} y(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(C_1 e^{(1-\frac{\alpha}{2})x} + C_2 x e^{(1-\frac{\alpha}{2})x} + \frac{e^{\frac{\alpha}{2}x}}{(\alpha-1)^2}\right) = 0$$

è verificata per $0 < \alpha < 2$. Infine, anche per $\alpha = 1$ la condizione

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{x}{2}} y(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 x e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}x^2 e^{\frac{x}{2}}\right) = 0$$

è verificata.

---

5 - Calcolare la serie di Fourier della funzione 2π-periodica che in $[-\pi, \pi]$ coincide con

$$f(x) = \min\{1, x^2\}$$

e dire quanto vale la sua somma.
Utilizzando la prima parte dell'esercizio, determinare la somma della serie numerica $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\cos k - \operatorname{sen} k}{k^3}$.

. . . .

La funzione f è pari, di conseguenza i suoi coefficienti di Fourier sono dati da

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^1 t^2\, dt + \frac{2}{\pi}\int_1^\pi dt = 2 - \frac{4}{3\pi}\,,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^1 t^2 \cos(kt)\, dt + \frac{2}{\pi}\int_1^\pi \cos(kt)\, dt = \frac{4}{\pi}\frac{k\cos k - \operatorname{sen} k}{k^3}\,, \qquad k \in \mathbf{N}\,,$$

$$b_k = 0\,, \qquad k \in \mathbf{N}\,.$$

Detta g la funzione 2π-periodica tale che $g(x) = f(x)$ in $[-\pi, \pi]$, è chiaro che g è continua e regolare a tratti. Pertanto, per il teorema sulla convergenza puntuale delle serie di Fourier per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$1 - \frac{2}{3\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\cos k - \operatorname{sen} k}{k^3}\cos(kx) = g(x)\,.$$

In particolare, poiché $g(0) = f(0) = 0$, si ha

$$1 - \frac{2}{3\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\cos k - \operatorname{sen} k}{k^3} = 0\,,$$

da cui segue

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\cos k - \operatorname{sen} k}{k^3} = \frac{1}{6} - \frac{\pi}{4}\,.$$