1 - Dire se la funzione $f(x) = x\,\mathrm{sen}(x^4)$ è analitica e calcolare $f^{(91)}(0)$, $f^{(92)}(0)$ e $f^{(93)}(0)$.

. . . .

In forza di

$$\mathrm{sen}\, t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, t^{2n+1} \qquad t \in \mathbf{R}$$

e per l'unicità dello sviluppo in serie di potenze, si ha

$$x\,\mathrm{sen}(x^4) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{8n+5} \qquad x \in \mathbf{R}\,.$$

Pertanto la funzione $f(x) = x\,\mathrm{sen}(x^4)$ è analitica e il suo sviluppo in serie di potenze coincide proprio con la sua serie di Taylor.
Infine, tenendo conto della definizione di serie di Taylor, si ha $f^{(91)}(0) = f^{(92)}(0) = 0$ perchè le equazioni $8n + 5 = 91$ e $8n + 5 = 92$ non hanno soluzioni in $\mathbf{N}$, mentre $f^{(93)}(0) = -\dfrac{(93)!}{(23)!}$, in quanto l'equazione $8n + 5 = 93$ ha soluzione $n = 11$.

---

2 - Dire se la forma differenziale

$$\omega = \frac{xy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dx + \Big(\frac{2y^2+x^2-1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \mathrm{sen}\, y\Big)dy$$

è esatta nel suo dominio e, in caso affermativo, determinarne le funzioni potenziali.

. . . .

Il dominio della forma differenziale assegnata $\omega = \langle F, dx\rangle$ è la palla $B := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ e il campo vettoriale $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ ha componenti $F_1(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ e $F_2(x, y) = \dfrac{2y^2+x^2-1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \mathrm{sen}\, y$.
In primo luogo si osservi che ω è chiusa in B, in quanto per ogni $(x, y) \in B$ si ha

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = \frac{x - x^3}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y)\,.$$

Poiché B è convesso, B è semplicemente connesso, e di conseguenza ω è anche esatta in B. Una funzione potenziale U di ω deve verificare $\dfrac{\partial U}{\partial x} = F_1$ e $\dfrac{\partial U}{\partial y} = F_2$ in B. Integrando $\dfrac{\partial U}{\partial x} = F_1$ rispetto a x, si ottiene

$$U(x, y) = -y\sqrt{1-x^2-y^2} + C(y)\,,$$

dove $C(y)$ è una funzione della sola variabile y. Derivando ora $U(x, y)$ rispetto a y e imponendo l'uguaglianza con F_2 si ha

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2y^2+x^2-1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + C'(y) = \frac{2y^2+x^2-1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \mathrm{sen}\, y\,,$$

da cui segue $C'(y) = \mathrm{sen}\, y$, cioè $C(y) = -\cos y + A$, $A \in \mathbf{R}$.
In conclusione, le funzioni potenziali di ω sono date da

$$U(x, y) = -y\sqrt{1-x^2-y^2} - \cos y + A\,, \qquad A \in \mathbf{R}\,.$$

---

3 - Calcolare

$$\iint_\Omega x \; dx\, dy$$

dove $\Omega = \big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 - 6x + 8 \geq 0\,, x^2 + y^2 - 4x \leq 0\big\}$.

. . . .

Si osservi che $\Omega = \Omega_1 \setminus \Omega_2$, dove

$$\Omega_1 = \big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ (x-2)^2 + y^2 \leq 4\big\} \qquad \Omega_2 = \big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ (x-3)^2 + y^2 \leq 1\big\}\,.$$

Per il teorema sull'additività rispetto al dominio di integrazione, si ha

$$\iint_\Omega x \; dx\, dy = \iint_{\Omega_1} x \; dx\, dy - \iint_{\Omega_2} x \; dx\, dy\,.$$

Utlizzando il cambiamento in coordinate polari, si ha

$$\iint_{\Omega_1} x\ dx\, dy = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (2+\rho\cos\phi)\rho\ d\rho d\phi = \int_0^{2\pi} \left(4+\frac{8}{3}\cos\phi\right)\ d\phi = 8\pi\,,$$

$$\iint_{\Omega_2} x\ dx\, dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (3+\rho\cos\phi)\rho\ d\rho d\phi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\cos\phi\right) d\phi = 3\pi\,,$$

e di conseguenza

$$\iint_{\Omega} x\ dx\, dy = 8\pi - 3\pi = 5\pi\,.$$

Si può giungere allo stesso risultato applicando la formula di Gauss-Green.

---

4 - Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y^2-y)\operatorname{arctg} x, \\ y(0)=\alpha\,, \end{cases} \qquad (P)$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$.
(i) Determinare la soluzione di (P).
(ii) Determinare per quali valori del parametro α le soluzioni sono globali.
(iii) Tracciare un grafico approssimativo delle soluzioni.

. . . .

(i) L'equazione differenziale assegnata è a variabili separabili e ammette le soluzioni stazionarie $y=0$ e $y=1$. Separando le variabili e integrando, si ottiene

$$\int \frac{1}{y^2-y}\ dy = \int \operatorname{arctg} x\ dx$$

$$\int \frac{1}{y^2-y}\ dy = \int \left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y}\right)\ dy = \log\left|\frac{y-1}{y}\right| + C\,, \qquad C\in\mathbf{R}$$

$$\int \operatorname{arctg} x\ dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)+C\,, \qquad C\in\mathbf{R}$$

$$\log\left|\frac{y-1}{y}\right| = x\operatorname{arctg} x - \log\sqrt{1+x^2}+C\,, \qquad C\in\mathbf{R}\,;$$

di conseguenza

$$\left|\frac{y-1}{y}\right| = Ce^{x\operatorname{arctg} x - \log\sqrt{1+x^2}}\,, \qquad C>0\,,$$

$$\frac{y-1}{y} = C\frac{e^{x\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}}\,, \qquad C\in\mathbf{R}\,,$$

$$y(x) = \frac{1}{1-C\frac{e^{x\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}}}\,, \qquad C\in\mathbf{R}\,.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0)=\alpha$, $\alpha\neq 0$, si ottiene

$$C=\frac{\alpha-1}{\alpha}\,,$$

da cui segue che la soluzione del problema (P), definita in un opportuno intorno di 0, è data da

$$y(x) = \frac{1}{1+\frac{1-\alpha}{\alpha}\cdot\frac{e^{x\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}}}\,. \qquad (1)$$

Si giunge allo stesso risultato osservando che $y'=(y^2-y)\operatorname{arctg} x$ è un'equazione differenziale di Bernoulli e utilizzando la sostituzione $z=-\dfrac{1}{y}$.
(ii) Da (1) segue che le soluzioni $y(x)$ sono pari, e quindi basta studiarle per $x>0$. (In effetti la parità delle soluzioni segue dall'espressione dell'equazione differenziale, in quanto se $y(x)$ è soluzione, si prova che anche $v(x)=y(-x)$ è soluzione).
Per stabilire l'esistenza di soluzioni globali, si deve studiare dove è ben definita la soluzione $y(x)$ data da (1), cioè studiare gli zeri del denominatore di $y(x)$

$$g(x) := 1+\frac{1-\alpha}{\alpha}\cdot\frac{e^{x\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}}\,.$$

Se $\dfrac{1-\alpha}{\alpha} > 0$, cioè per $0 < \alpha < 1$, si ha $g(x) > 0$. Inoltre, per ogni $x > 0$ $y' = (y^2 - y)\operatorname{arctg} x < 0$, in quanto $0 < y < 1$ per il teorema di esistenza e unicità locale. Pertanto per $0 < \alpha < 1$ la soluzione è definita in $[0, +\infty)$, strettamente decrescente e $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

Nel caso $\alpha > 1$ le soluzioni non sono globali. Infatti $g(0) = \dfrac{1}{\alpha} > 0$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ e g è strettamente decrescente (perchè $y' = (y^2 - y)\operatorname{arctg} x > 0$), e quindi, per il teorema degli zeri, esiste uno ed un solo $x_0 > 0$ tale che $g(x_0) = 0$, e di conseguenza $\lim_{x\to x_0^-} y(x) = +\infty$.

Infine se $\alpha < 0$ le soluzioni sono globali: essendo g strettamente decrescente (perchè $y' = (y^2 - y)\operatorname{arctg} x > 0$), si ha per ogni $x > 0$ $g(x) < g(0) = \dfrac{1}{\alpha} < 0$. Inoltre, $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

In conclusione, le soluzioni sono globali per ogni $\alpha \le 1$.

(iii) Grazie alle considerazioni fatte al punto precedente si possono tracciare i seguenti grafici approssimativi delle soluzioni.