

1. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto solo su questi fogli**.
2. **Non è ammesso l'uso di appunti, libri e calcolatrici.**

Esercizio 1.

Calcolare

$$\iiint_{\Omega} y^3 \, dx \, dy \, dz$$

dove $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq y \leq 1, \quad x^2 + (z - 1)^2 \leq e^{2y^2}\}$.

Esercizio 2.

Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{y^2 - x}{\sqrt{y - x^2}},$$

- (i) determinare e disegnare il dominio di f ;
- (ii) dimostrare che non esiste $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$
- (iii) determinare, se esiste, il gradiente di f in ogni punto del suo dominio;
- (iv) determinare, se esistono, il massimo assoluto e il minimo assoluto di f nel rettangolo D di vertici $(0, 2)$, $(1, 2)$, $(1, 4)$ e $(0, 4)$.

Esercizio 3.

Sia dato il problema di Cauchy, al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$,

$$\begin{cases} y' = (e^x - 1)y^2 - y, \\ y(0) = \alpha. \end{cases} \tag{P}$$

- (i) Determinare la soluzione di (P) .
- (ii) Determinare per quali valori del parametro α le soluzioni sono globali.
- (iii) Tracciare un grafico approssimativo delle soluzioni.

Esercizio 4.

Data la funzione

$$f(x) = \max\{\pi - |x|, \pi/2\}, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

- (i) calcolare la serie di Fourier della funzione $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 2π -periodica tale che $g(x) = f(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$, e dire quanto vale la sua somma.

- (ii) Utilizzando la prima parte dell'esercizio, verificare che $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Domanda 1. Unicit  dello sviluppo in serie di potenze: enunciato e dimostrazione.

Domanda 2. Determinare, se esiste, una funzione $g(x, y)$ in modo che la forma differenziale $g(x, y)dx + \cos x dy$ risulti esatta.

Domanda 3. Definizione di curva. Lunghezza di una curva.