

1. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto solo su questi fogli**.  
2. **Non è ammesso l'uso di appunti, libri e calcolatrici.**

**Esercizio 1.**

Calcolare

$$\iiint_{\Omega} y^3 \, dx \, dy \, dz$$

dove  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq y \leq 1, \quad x^2 + (z - 1)^2 \leq e^{2y^2}\}$ .

**Esercizio 2.**

Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{y^2 - x}{\sqrt{y - x^2}},$$

- (i) determinare e disegnare il dominio di  $f$ ;
- (ii) dimostrare che non esiste  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$
- (iii) determinare, se esiste, il gradiente di  $f$  in ogni punto del suo dominio;
- (iv) determinare, se esistono, il massimo assoluto e il minimo assoluto di  $f$  nel rettangolo  $D$  di vertici  $(0, 2)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(1, 4)$  e  $(0, 4)$ .

**Esercizio 3.**

Sia dato il problema di Cauchy, al variare del parametro  $\alpha \in \mathbf{R}$ ,

$$\begin{cases} y' = (e^x - 1)y^2 - y, \\ y(0) = \alpha. \end{cases} \tag{P}$$

- (i) Determinare la soluzione di  $(P)$ .
- (ii) Determinare per quali valori del parametro  $\alpha$  le soluzioni sono globali.
- (iii) Tracciare un grafico approssimativo delle soluzioni.

**Esercizio 4.**

Data la funzione

$$f(x) = \max\{\pi - |x|, \pi/2\}, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

- (i) calcolare la serie di Fourier della funzione  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$   $2\pi$ -periodica tale che  $g(x) = f(x)$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$ , e dire quanto vale la sua somma.

- (ii) Utilizzando la prima parte dell'esercizio, verificare che  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ .

**Domanda 1.** Unicit  dello sviluppo in serie di potenze: enunciato e dimostrazione.

**Domanda 2.** Determinare, se esiste, una funzione  $g(x, y)$  in modo che la forma differenziale  $g(x, y)dx + \cos x dy$  risulti esatta.

**Domanda 3.** Definizione di curva. Lunghezza di una curva.