1 - Calcolare

$$\iiint_\Omega y^3 \; dx\, dy\, dz$$

dove $\quad \Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \; : \; 0 \le y \le 1, \quad x^2 + (z-1)^2 \le e^{2y^2}\}\,.$

....

Integrando per strati, si ha

$$\iiint_\Omega y^3 \; dx\, dy\, dz = \int_0^1 y^3 \iint_{\Omega_y} \; dx \; dz \; dy\,,$$

dove per ogni $0 \le y \le 1$, $\Omega_y = \{(x,z) \in \mathbf{R}^2 \; : \; x^2 + (z-1)^2 \le e^{2y^2}\}$. Poiché Ω_y è un cerchio, si ha

$$|\Omega_y| = \iint_{\Omega_y} \; dx \; dz = \pi e^{2y^2}\,,$$

e di conseguenza

$$\iiint_\Omega y^3 \; dx\, dy\, dz = \pi \int_0^1 y^3 e^{2y^2} \; dy = \frac{\pi}{4}\big[y^2 e^{2y^2}\big]_0^1 - \frac{\pi}{2}\int_0^1 y e^{2y^2} \; dy = \frac{\pi}{8}(e^2+1)\,.$$

---

2 - Data la funzione $\qquad f(x,y) = \dfrac{y^2 - x}{\sqrt{y - x^2}}\,,$

(i) determinare e disegnare il dominio di f;
(ii) dimostrare che non esiste $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$;
(iii) determinare, se esiste, il gradiente di f in ogni punto del suo dominio;
(iv) determinare, se esistono, il massimo assoluto e il minimo assoluto di f nel rettangolo D di vertici $(0,2)$, $(1,2)$, $(1,4)$ e $(0,4)$.

....

(i) Il dominio di f è l'insieme $A := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \; y > x^2\}$.
(ii) Sebbene si abbia per ogni $m \in \mathbf{R}$, $m > 0$,

$$f(x, mx) = \frac{m^2x^2 - x}{\sqrt{mx - x^2}} = \sqrt{x}\,\frac{m^2 x - 1}{\sqrt{m - x}} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0\,,$$

e per ogni $m \in \mathbf{R}$, $m < 0$,

$$f(x, mx) = \frac{m^2x^2 - x}{\sqrt{mx - x^2}} = \sqrt{-x}\,\frac{1 - m^2 x}{\sqrt{x - m}} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 0\,,$$

il limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste, in quanto per ogni $k > 1$ si ha

$$f(x, kx^2) = \frac{k^2x^4 - x}{\sqrt{kx^2 - x^2}} = \frac{x}{|x|}\,\frac{k^2x^3 - 1}{\sqrt{k-1}}\,.$$

(iii) Si osservi che $f \in C^1(A)$ e per ogni $(x,y) \in A$ si ha

$$\nabla f(x,y) = \Big(\frac{y(xy-1)}{(y-x^2)^{3/2}}, \frac{3y^2 - 4yx^2 + x}{2(y-x^2)^{3/2}}\Big)\,.$$

(iv) La funzione f è continua in $D \subset A$, insieme chiuso e limitato di $\mathbf{R}^2$, e quindi per il teorema di Weierstrass f ha minimo assoluto e massimo assoluto in D.
Si verifica facilmente che f non ha punti critici nell'interno di D, e di conseguenza il minimo e il massimo di f sono assunti in punti sul bordo di D. Pertanto, si passa a studiare f sul bordo di D:

$$f(x,2) = \frac{4-x}{\sqrt{2-x^2}} \quad x\in[0,1]\,, \qquad f_x(x,2) = \frac{2(2x-1)}{(2-x^2)^{3/2}}\,, \qquad f_x(x,2) = 0 \;\text{ per }\; x = 1/2\,;$$

$$f(1,y) = \frac{y^2-1}{\sqrt{y-1}} \quad y\in[2,4]\,, \qquad f_y(1,y) = \frac{3y^2-4y+1}{2(y-1)^{3/2}}\,, \qquad f_y(1,y) \ne 0 \;\text{ in }\; [2,4]\,;$$

$$f(x,4) = \frac{16-x}{\sqrt{4-x^2}} \quad x\in[0,1]\,, \qquad f_x(x,4) = \frac{4(4x-1)}{(4-x^2)^{3/2}}\,, \qquad f_x(x,4) = 0 \;\text{ per }\; x = 1/4\,;$$

$$f(0,y) = \frac{y^2}{\sqrt{y}} = y^{3/2} \qquad y \in [2,4]\,, \qquad\qquad f_y(0,y) = \frac{3}{2}y^{1/2}\,, \qquad f_y(0,y) \neq 0 \ \text{ in } \ [2,4]\,.$$

In conclusione, confrontando i valori

$$f(0,2) = 2\sqrt{2}\,, \quad f(1/2,2) = \sqrt{7}\,, \quad f(1,2) = 3\,, \quad f(1,4) = 5\sqrt{3}\,, \quad f(1/4,4) = 3\sqrt{7}\,, \quad f(0,4) = 8\,,$$

si ha che il minimo assoluto è $\sqrt{7}$ e il massimo assoluto è $5\sqrt{3}$.

---

3 - Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (e^x - 1)y^2 - y, \\ \\ y(0) = \alpha\,, \end{cases} \tag{P}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$.
(i) Determinare la soluzione di (P).
(ii) Determinare per quali valori del parametro α le soluzioni sono globali.
(iii) Tracciare un grafico approssimativo delle soluzioni.

....

(i) L'equazione differenziale assegnata è di Bernoulli. Se $\alpha = 0$ la soluzione di (P) è $y = 0$.
Per ogni $\alpha \neq 0$, posto $z = y^{-1}$, l'equazione assegnata si trasforma in un'equazione lineare nella variabile z e il problema (P) diventa

$$\begin{cases} z' = z + 1 - e^x, \\ \\ z(0) = 1/\alpha\,, \end{cases}$$

la cui soluzione è data da

$$z(x) = e^x\Big(\frac{1}{\alpha} + \int_0^x e^{-t}(1 - e^t)\ dt\Big) = e^x\Big(\frac{1}{\alpha} + \int_0^x (e^{-t} - 1)\ dt\Big) = e^x\Big(\frac{1}{\alpha} - e^{-x} - x + 1\Big)\,.$$

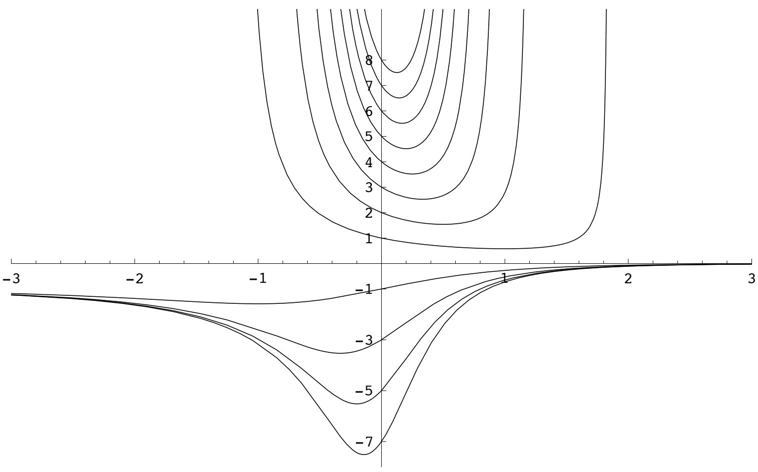
Pertanto, tenendo conto di $y = z^{-1}$, la soluzione di (P) è data da

$$y(x) = \frac{1}{e^x\Big(\frac{1}{\alpha} - e^{-x} - x + 1\Big)} = \frac{1}{(\frac{1}{\alpha} + 1)e^x - xe^x - 1}\,.$$

(ii) Per ogni $\alpha < 0$ si ha $z(x) < 0$, in quanto $\dfrac{1}{\alpha} - e^{-x} - x + 1 < 0$ per la disuguaglianza notevole $e^t \geq t + 1$, $t \in \mathbf{R}$. (Si giunge alla stessa conclusione se si nota che $z(x)$ ha un massimo negativo.) Pertanto per ogni $\alpha < 0$ le soluzioni $y(x)$ sono definite in tutto $\mathbf{R}$, e quindi sono globali.
Si osservi che per ogni $\alpha \neq 0$

$$z'(x) = z(x) + 1 - e^x = (\frac{1}{\alpha} + 1)e^x - xe^x - 1 + 1 - e^x = (\frac{1}{\alpha} - x)e^x\,,$$

e di conseguenza $x = 1/\alpha$ è il punto di massimo assoluto per $z(x)$ e il massimo è $z(1/\alpha) = e^{1/\alpha} - 1$.
Nel caso $\alpha > 0$, poiché $z(0) = 1/\alpha > 0$, $\lim_{x\to-\infty} z(x) = -1$ e $\lim_{x\to+\infty} z(x) = -\infty$ per il teorema degli zeri esistono (e sono unici per la monotonia) $a < 0$ e $b > 0$ tali che $z(a) = z(b) = 0$, e di conseguenza l'intervallo massimale di definizione di $y(x)$ è $]a, b[$ e $\lim_{x\to a^+} y(x) = \lim_{x\to b^-} y(x) = +\infty$.
In conclusione, le soluzioni sono globali solo per $\alpha \leq 0$.
(iii) Si noti che, per ogni $\alpha \neq 0$, $x = 1/\alpha$ è il punto di minimo assoluto per $y(x)$ e il minimo è $y(1/\alpha) = \dfrac{1}{e^{1/\alpha} - 1}$.
Inoltre, per ogni $\alpha < 0$ si ha $\lim_{x\to-\infty} y(x) = -1$ e $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$.
Grazie a tutte le considerazioni fatte, si possono tracciare i seguenti grafici approssimativi delle soluzioni.



4 - Data la funzione

$$f(x) = \max\{\pi - |x|, \pi/2\}\,, \qquad x \in [-\pi, \pi]\,,$$

(i) calcolare la serie di Fourier della funzione $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 2π-periodica tale che $g(x) = f(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$, e dire quanto vale la sua somma.

(ii) Utilizzando la prima parte dell'esercizio, verificare che $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},.$

. . . .

(i) La funzione f è pari, e di conseguenza i coefficienti di Fourier di g sono dati da

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen}(kt)\, dt = 0\,,$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\pi - t)\, dt + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\pi}{2}\, dt = \frac{2}{\pi} \big[\pi t - \frac{t^2}{2}\big]_0^{\pi/2} + \frac{\pi}{2} = \frac{5}{4}\pi\,,$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\pi - t) \cos(kt)\, dt + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\pi}{2} \cos(kt)\, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos(kt)\, dt + \int_0^{\pi} \cos(kt)\, dt - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} t \cos(kt)\, dt \\ &= \frac{\operatorname{sen}(k\pi/2)}{k} - \frac{2}{\pi k} [t \operatorname{sen}(kt)]_0^{\pi/2} + \frac{2}{\pi k} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(kt)\, dt = -\frac{2}{\pi k^2} [\cos(kt)]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2}{\pi k^2} \big(1 - \cos(k\pi/2)\big)\,, \qquad k \in \mathbf{N}\,. \end{aligned}$$

La funzione 2π-periodica g tale che $g(x) = f(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$, è regolare a tratti: per il teorema sulla convergenza puntuale si ha

$$\frac{5}{8}\pi + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(k\pi/2)}{k^2} \cos(kx) = \frac{g(x^+) + g(x^-)}{2}\,, \qquad \forall x \in \mathbf{R}\,.$$

(ii) Poiché g è continua in 0 e $g(0) = f(0) = \pi$, si ha

$$\frac{5}{8}\pi + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(k\pi/2)}{k^2} = \pi\,,$$

$$\frac{5}{8}\pi + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \pi\,,$$

$$\frac{5}{8}\pi + \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \pi\,,$$

$$\frac{3}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{8}\pi\,,$$

da cui segue

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$