1 - Dire se la funzione $f(x) = x^3 e^{7x^2}$ è analitica e calcolare $f^{(103)}(0)$, $f^{(104)}(0)$ e $f^{(105)}(0)$.

....

In forza di

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \qquad t \in \mathbf{R}$$

e per l'unicità dello sviluppo in serie di potenze, si ha

$$x^3 e^{7x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n!} x^{2n+3} \qquad x \in \mathbf{R}\,.$$

Pertanto la funzione $f(x) = x^3 e^{7x^2}$ è analitica e il suo sviluppo in serie di potenze coincide proprio con la sua serie di Taylor.
Inoltre, tenendo conto della definizione di serie di Taylor, si ha $f^{(103)}(0) = \dfrac{7^{50}(103)!}{(50)!}$, in quanto l'equazione $2n+3 = 103$ ha soluzione $n = 50$ e $f^{(105)}(0) = \dfrac{7^{51}(105)!}{(51)!}$, in quanto l'equazione $2n + 3 = 105$ ha soluzione $n = 51$, mentre $f^{(104)}(0) = 0$ perchè l'equazione $2n + 3 = 104$ non ha soluzione in $\mathbf{N}$.

---

2 - Data la funzione

$$f(x, y) = e^{\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{2}}\,,$$

(i) determinare l'insieme di definizione di f e calcolare il gradiente di f;
(ii) determinare il minimo assoluto e il massimo assoluto di f nel quadrato $D = \Big[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\Big] \times \Big[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\Big]$.

....

(i) L'insieme di definizione di f è dato da

$$A = \Big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}\Big\}\,.$$

Si osservi che $f \in C^1(A)$ e per ogni $(x, y) \in A$ si ha

$$\nabla f(x, y) = \Big(\frac{e^{\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{2}}}{2\cos^2 x}, \frac{e^{\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{2}}}{2\cos^2 y}\Big)\,.$$

(ii) La funzione f è continua in $D \subset A$, insieme chiuso e limitato di $\mathbf{R}^2$, e quindi per il teorema di Weierstrass f ha minimo assoluto e massimo assoluto in D.
Poiché non esistono non esistono punti critici di f nell'interno di D, il minimo e il massimo di f sono assunti in punti sul bordo di D. Per studiare f sul bordo di D, grazie alla simmetria, basta esaminare le funzioni

$$f(x, -\pi/4) = e^{\frac{\operatorname{tg} x - 1}{2}}\,, \quad f(x, \pi/4) = e^{\frac{\operatorname{tg} x + 1}{2}}\,, \qquad x \in \Big[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\Big]\,,$$

le cui derivate

$$f_x(x, -\pi/4) = \frac{e^{\frac{\operatorname{tg} x - 1}{2}}}{2\cos^2 x}\,, \quad f_x(x, \pi/4) = \frac{e^{\frac{\operatorname{tg} x + 1}{2}}}{2\cos^2 x}\,, \qquad x \in \Big(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\Big)\,,$$

non si annullano.
In conclusione, confrontando i valori che f assume nei quattro vertici del quadrato, cioè

$$f\Big(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\Big) = e^{-1}\,, \qquad f\Big(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\Big) = f\Big(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\Big) = 1\,, \qquad f\Big(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\Big) = e\,,$$

si ha

$$\min_D f(x, y) = f\Big(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\Big) = e^{-1} \qquad \text{e} \qquad \max_D f(x, y) = f\Big(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\Big) = e\,.$$

---

3 - Calcolare

$$\iint_\Omega e^{|x^2+y^2-4|}\, dx\, dy$$

dove $\Omega = \big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ :\ x^2 + y^2 \leq 9\,, \quad y \geq \sqrt{3}x\,\big\}\,.$

....

È conveniente utilizzare il cambiamento in coordinate polari, e di conseguenza si ha

$$\iint_\Omega e^{|x^2+y^2-4|}\,dx\,dy = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4}{3}\pi} d\phi \int_0^3 \rho e^{|\rho^2-4|}\,d\rho = \pi e^4 \int_0^2 \rho e^{-\rho^2}\,d\rho + \pi e^{-4}\int_2^3 \rho e^{\rho^2}\,d\rho$$
$$= \pi e^4 \Big[-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\Big]_0^2 + \pi e^{-4}\Big[\frac{1}{2}e^{\rho^2}\Big]_2^3 = \pi\frac{e^4+e^5}{2} - \pi\,.$$

---

4 - Data l'equazione differenziale

$$y' = x^3 y + x^7\,,$$

(i) determinare l'integrale generale;
(ii) determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ ogni soluzione $y(x)$ verifica la condizione

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x^\alpha} y(x) = 0\,.$$

. . . .

(i) L'equazione differenziale assegnata è lineare del primo ordine. L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y(x) = Ce^{\frac{x^4}{4}} \qquad C \in \mathbf{R}\,.$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione completa, è opportuno calcolare

$$\int x^7 e^{-\frac{x^4}{4}}\,dx\,.$$

Integrando per parti, si ottiene

$$\int x^7 e^{-\frac{x^4}{4}}\,dx = -x^4 e^{-\frac{x^4}{4}} + 4\int x^3 e^{-\frac{x^4}{4}}\,dx = -e^{-\frac{x^4}{4}}(x^4+4)\,.$$

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione assegnata è dato da

$$y(x) = Ce^{\frac{x^4}{4}} - (x^4+4) \qquad C \in \mathbf{R}\,.$$

(ii) Infine, si osservi che per ogni $C \in \mathbf{R}$

$$e^{-x^\alpha} y(x) = Ce^{\frac{x^4}{4}-x^\alpha} - e^{-x^\alpha}(x^4+4) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

se e solo se $\alpha \geq 4$.