

1. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto solo su questi fogli**.
2. **Non è ammesso l'uso di appunti, libri e calcolatrici.**

Esercizio 1.

Calcolare l'integrale $\iint_D \min\{y, \sqrt{x}\} dx dy$ dove $D = [0, 1] \times [0, 1]$.

Esercizio 2.

Determinare gli eventuali punti critici della funzione

$$f(x, y) = 2xy - 1 - (x^2 + y^2)^2$$

e classificarli.

Esercizio 3.

Data l'equazione differenziale dipendente dal parametro $\alpha \in \mathbf{R}$

$$y'' + 2y' + 2y = e^{\alpha x},$$

- (i) determinare l'integrale generale al variare di α ;
(ii) determinare, se esistono, i valori di α per i quali ogni soluzione $y(x)$ verifichi la condizione

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{4x} y(x) = 0.$$

Esercizio 4.

Data la funzione

$$f(x) = |x| - \pi, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

- (i) calcolare la serie di Fourier della funzione $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 2π -periodica tale che $g(x) = f(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$, e dire quanto vale la sua somma.

- (ii) Utilizzando la prima parte, verificare che
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Domanda 1. Definizione di serie di Taylor. Provare l'unicità dello sviluppo in serie di potenze di una funzione.

Domanda 2. Definizione di punto critico. Teorema di Fermat: enunciato e dimostrazione.

Domanda 3. Definizione di forma differenziale esatta, di funzione potenziale e di forma differenziale chiusa. Spiegare la relazione fra forme differenziali esatte e forme differenziali chiuse.