1 - Calcolare l'integrale $\displaystyle\iint_D \min\{y, \sqrt{x}\}\, dx\, dy$ dove $D = [0,1] \times [0,1]$.

. . . .

Per la formula di riduzione su rettangoli, si ha

$$\iint_D \min\{y, \sqrt{x}\}\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 \min\{y, \sqrt{x}\}\, dy\, dx = \int_0^1 \Big[\int_0^{\sqrt{x}} y\, dy + \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{x}\, dy \Big]\, dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - \frac{x}{2})\, dx = \frac{5}{12}\,.$$

---

2 - Determinare gli eventuali punti critici della funzione

$$f(x,y) = 2xy - 1 - (x^2 + y^2)^2$$

e classificarli.

. . . .

In primo luogo si osservi che $f \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$, e di conseguenza si può applicare il teorema di Fermat: i punti di estremo sono necessariamente punti critici.
Per ogni $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ il gradiente di f è dato da

$$\nabla f(x,y) = \big(2y - 4x(x^2+y^2), 2x - 4y(x^2+y^2)\big)\,,$$

e si annulla nei punti $P_1 := (0,0)$, $P_2 := \Big(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\Big)$ e $P_3 := \Big(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\Big)$.
Per classificare i punti critici P_1, P_2 e P_3 si possono utilizzare le condizioni sufficienti basate sul segno della forma quadratica associata alla matrice hessiana.
La matrice hessiana di f calcolata nel generico punto $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ è data da

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -12x^2 - 4y^2 & 2 - 8xy \\ 2 - 8xy & -12y^2 - 4x^2 \end{pmatrix}\,.$$

Si osservi ora che

$$D^2 f(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\,;$$

di conseguenza, essendo $\det D^2 f(P_1) = -4 < 0$, la matrice $D^2 f(P_1)$ è indefinita, e quindi P_1 è punto di sella.
Inoltre,

$$D^2 f(P_2) = D^2 f(P_3) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\,,$$

e di conseguenza le matrici $D^2 f(P_2)$ e $D^2 f(P_3)$ sono definite negative, in quanto $\det D^2 f(P_2) = \det D^2 f(P_3) = 16 > 0$ e $f_{xx}(P_2) = f_{xx}(P_3) = -4 < 0$. Pertanto, P_2 e P_3 sono punti di massimo locale.
In conclusione, il valore

$$f(P_2) = f(P_3) = -\frac{3}{4}$$

è un massimo locale per f.

---

3 - Data l'equazione differenziale dipendente dal parametro $\alpha \in \mathbf{R}$

$$y'' + 2y' + 2y = e^{\alpha x}\,,$$

(i) determinare l'integrale generale al variare di α;
(ii) determinare, se esistono, i valori di α per i quali ogni soluzione $y(x)$ verifichi la condizione

$$\lim_{x \to -\infty} e^{4x} y(x) = 0\,.$$

. . . .

(i) L'integrale generale è dato da

$$y(x) = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x) + \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + 2\alpha + 2}\,, \qquad C_1\,, C_2 \in \mathbf{R}\,,$$

al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$.
(ii) Ogni soluzione $y(x)$ verifica la condizione $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{4x} y(x) = 0$ solo se $\alpha > -4$.

---

4 - Data la funzione

$$f(x) = |x| - \pi\,, \qquad x \in [-\pi, \pi]\,,$$

(i) calcolare la serie di Fourier della funzione $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 2π-periodica tale che $g(x) = f(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$, e dire quanto vale la sua somma.

(ii) Utilizzando la prima parte, verificare che $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

. . . .

(i) La funzione f è pari, e di conseguenza i coefficienti di Fourier di g sono dati da

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen}(kt)\, dt = 0\,,$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (t - \pi)\, dt = \frac{2}{\pi} \Big[\frac{t^2}{2} - \pi t\Big]_0^{\pi} = -\pi\,,$$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (t - \pi) \cos(kt)\, dt \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos(kt)\, dt - 2 \int_0^{\pi} \cos(kt)\, dt \\
&= \frac{2}{\pi k} [t \operatorname{sen}(kt)]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi k} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(kt)\, dt - \frac{2}{k} [\operatorname{sen}(kt)]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k^2} [\cos(kt)]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi k^2} \big((-1)^k - 1\big)\,, \qquad k \in \mathbf{N}\,.
\end{aligned}$$

La funzione 2π-periodica g tale che $g(x) = f(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$, è continua e regolare a tratti in $\mathbf{R}$: per il teorema sulla convergenza puntuale si ha

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \cos(kx) = g(x)\,, \qquad \forall x \in \mathbf{R}\,,$$

$$-\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2} = g(x)\,, \qquad \forall x \in \mathbf{R}\,.$$

(ii) Poiché $g(0) = f(0) = -\pi$, si ha

$$-\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = -\pi\,,$$

da cui segue

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$