1 - Calcolare l'integrale $\displaystyle\iint_D |y|\,dx\,dy$ dove $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ |y| \leq 1, \ e^y \leq x \leq e\}$.

. . . .

Grazie alla formula di riduzione per domini semplici, si ha

$$\begin{aligned}\iint_D |y|\,dx\,dy &= \int_{-1}^{1} |y| \int_{e^y}^{e} dx\,dy = \int_{-1}^{1} |y|(e - e^y)\,dy = -\int_{-1}^{0} y(e - e^y)\,dy + \int_{0}^{1} y(e - e^y)\,dy \\ &= e + \int_{-1}^{0} ye^y\,dy - \int_{0}^{1} ye^y\,dy\,.\end{aligned}$$

Integrando per parti, si ottiene

$$\int ye^y\,dy = e^y(y-1)\,,$$

e di conseguenza

$$\iint_D |y|\,dx\,dy = e + \big[e^y(y-1)\big]_{-1}^{0} - \big[e^y(y-1)\big]_{0}^{1} = e - 2 + 2e^{-1}\,.$$

---

2 - Determinare il minimo assoluto e il massimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4y - 2$$

nell'insieme $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 5\}$.

. . . .

La funzione f è continua in $\mathbf{R}^2$, e di conseguenza per il teorema di Weierstrass f ammette minimo assoluto e massimo assoluto nell'insieme compatto C.
Si osservi che $f \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$, e di conseguenza si può applicare il teorema di Fermat: i punti di estremo interni a C sono necessariamente punti critici.
Per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ il gradiente di f è dato da

$$\nabla f(x, y) = \big(2x, 2y - 4\big)\,,$$

e si annulla nel punto $(0, 2)$, che è interno a C.
Per determinare eventuali estremi di f sulla frontiera $\partial C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 5\}$ di C, si consideri la restrizione di f a ∂C, cioè la funzione

$$g(t) = f(\sqrt{5}\cos t, \sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,t) = 3 - 4\sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,t\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,.$$

Si osservi che:

$$g(0) = g(2\pi) = 3\,,$$

$$g'(t) = -4\sqrt{5}\cos t = 0\,, \qquad \text{per} \quad t = \pi/2\,, 3\pi/2\,.$$

In conclusione, per determinare il minimo assoluto e il massimo assoluto di f nell'insieme compatto C si devono confrontare i valori

$$f(0, 2) = -6\,, \qquad f(\sqrt{5}, 0) = 3\,, \qquad f(0, \sqrt{5}) = 3 - 4\sqrt{5}\,, \qquad f(0, -\sqrt{5}) = 3 + 4\sqrt{5}\,,$$

e di conseguenza

$$\min_{(x,y)\in C} f(x, y) = f(0, 2) = -6\,, \qquad \max_{(x,y)\in C} f(x, y) = f(0, -\sqrt{5}) = 3 + 4\sqrt{5}\,.$$

---

3 - Verificare che la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = y\,, \\ y(0) = 1\,, \\ y'(0) = 0\,, \end{cases}$$

è una funzione analitica e determinare il suo sviluppo in serie di potenze.

. . . .

La soluzione del problema di Cauchy è data da

$$y(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x\,, \qquad x \in \mathbf{R}\,,$$

ed è una funzione analitica, in quanto si ha

$$y(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\,, \qquad x \in \mathbf{R}\,.$$

---

4 - Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 - \dfrac{x}{\pi} & \text{se} \quad x \in [-\pi, 0]\,, \\ 1 - \dfrac{x}{\pi} & \text{se} \quad x \in (0, \pi]\,, \end{cases}$$

(i) calcolare la serie di Fourier della funzione $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 2π-periodica tale che $g(x) = f(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$, e dire quanto vale la sua somma.

(ii) Utilizzando la prima parte, verificare che $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

. . . .

(i) La funzione f è dispari, e di conseguenza i coefficienti di Fourier di g sono dati da

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\;dt = 0\,,$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{sen}(kt)\;dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\big(1 - \frac{t}{\pi}\big)\,\mathrm{sen}(kt)\;dt \\ &= -\frac{2}{\pi k}[\cos(kt)]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi} t\,\mathrm{sen}(kt)\;dt \\ &= \frac{2}{\pi k}\big(1 - (-1)^k\big) + \frac{2}{\pi^2 k}[t\cos(kt)]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi^2 k}\int_0^{\pi}\cos(kt)\;dt \\ &= \frac{2}{\pi k}\big(1 - (-1)^k\big) + \frac{2}{\pi k}(-1)^k - \frac{2}{\pi^2 k^2}[\mathrm{sen}(kt)]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi k}\,, \qquad k \in \mathbf{N}\,. \end{aligned}$$

La funzione 2π-periodica g tale che $g(x) = f(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$, è regolare a tratti in $\mathbf{R}$: per il teorema sulla convergenza puntuale si ha

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}(kx)}{k} = \frac{g(x^+) + g(x^-)}{2}\,, \qquad \forall x \in \mathbf{R}\,.$$

(ii) Poiché f è continua in $\pi/2$ e $g(\pi/2) = f(\pi/2) = 1/2$, si ha

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}(k\pi/2)}{k} = \frac{1}{2}\,,$$

da cui segue

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}\,.$$