ESERCIZI VARI

---

1. Sia data l'equazione differenziale dipendente dal parametro $\alpha \in \mathbf{R}$

$$y' = 2\alpha x^2 y + x^2 .$$

Determinare, se esistono, i valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali ogni soluzione $y(x)$ dell'equazione differenziale verifichi la condizione $\lim_{x \to +\infty} y(x) = 10$.

---

2. Data l'equazione

$$3 - 3\cos x(2-y)^2 - x^2(1 - \sqrt[3]{2-y}) = 0 ,$$

dimostrare che in un intorno del punto $(0,3)$ essa individua implicitamente una funzione $y = \phi(x)$ oppure $x = \psi(y)$. Trovare lo sviluppo di Taylor del secondo ordine della funzione così trovata (con punto iniziale 0 o 3).

---

3. Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ tali che ogni soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' + 2\alpha y' + 4y = 0$$

verifichi la condizione

$$\lim_{x \to +\infty} e^x y(x) = 0 .$$

---

4. Calcolare

$$\iiint_\Omega \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^3} \, dx\, dy\, dz$$

dove $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 \le 18 ,\ x \ge 0 ,\ y \ge 0 ,\ z \ge 3\right\}$.

---

5. Utilizzando la formula di Gauss-Green, calcolare

$$\iint_\Omega (2x - x^2y^2) \, dx\, dy$$

dove $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ 1 \le x^2+y^2 \le 4\right\}$.

---

6. Sia data l'equazione differenziale dipendente dal parametro $\alpha \in \mathbf{R}$

$$y' = 4\alpha x^2 y + x^2 .$$

Determinare, se esistono, i valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali ogni soluzione $y(x)$ dell'equazione differenziale verifichi la condizione

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = 10 .$$

---

7. Data l'equazione

$$y^2 \cos(x - \pi/2) + (1 - \sqrt[3]{y})(x - \pi/2)^2 - 1 = 0 ,$$

dimostrare che in un intorno del punto $(\pi/2, 1)$ essa individua implicitamente una funzione $y = \phi(x)$ oppure $x = \psi(y)$. Trovare lo sviluppo di Taylor del secondo ordine della funzione così trovata (con punto iniziale $\pi/2$ o 1).

---

8. Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ tali che ogni soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' + 2\alpha y' + 9y = 0$$

verifichi la condizione

$$\lim_{x\to+\infty} e^{2x}y(x) = 0\,.$$

---

9. Calcolare

$$\iiint_\Omega \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\; dx\,dy\,dz$$

dove

$$\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\ :\ x^2+y^2+z^2\le 4\,,\ x\ge 0\,,\ y\ge 0\,,\ z\le -1\right\}.$$

---

10. Determinare, se esistono, le soluzioni definite in tutto $\mathbf{R}$ dell'equazione differenziale

$$y' = -2e^{2x}y - e^{4x}y^2\,.$$

---

11. Calcolare la serie di Fourier della funzione 2π-periodica che in $[-\pi,\pi]$ coincide con

$$f(x) = \min\{|x|, \pi/2\}$$

e dire quanto vale la sua somma.
Utilizzando la prima parte dell'esercizio, determinare la somma della serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\,.$$

---

12. Determinare, se esistono, le soluzioni definite in tutto $\mathbf{R}$ dell'equazione differenziale

$$y' = -3e^{3x}y - e^{6x}y^2\,.$$

---

13. Calcolare la serie di Fourier della funzione 2π-periodica che in $[-\pi,\pi]$ coincide con

$$f(x) = \max\{|x|, \pi/2\}$$

e dire quanto vale la sua somma.
Utilizzando la prima parte dell'esercizio, determinare la somma della serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\,.$$

---

14. Determinare, se esistono, i valori del parametro $\alpha\in\mathbf{R}$ per i quali ogni soluzione $y(t)$ dell'equazione differenziale

$$y'' + 4(\alpha-1)y' + y = e^{-t}$$

verifichi la condizione $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0\,.$

---

15. Determinare i valori del parametro $\alpha\in\mathbf{R}$ per i quali ogni soluzione $y(x)$ dell'equazione differenziale

$$y' + \alpha y = \operatorname{sen} x$$

verifichi la condizione

$$\lim_{x\to-\infty} e^{2x}y(x) = 0\,.$$

---

16. Determinare, se esistono, i valori del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali ogni soluzione $y(t)$ dell'equazione differenziale

$$y'' + 4(\alpha - 2)y' + y = e^{-t}$$

verifichi la condizione $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$.

---

17. Data l'equazione

$$(y + 3)\log(x - e + 1) + x^2 + (y - 1)^2 - e^2 = 0\,,$$

dimostrare che in un intorno del punto $(e, 1)$ essa individua implicitamente una funzione $y = \phi(x)$ oppure $x = \psi(y)$. Trovare lo sviluppo di Taylor del secondo ordine della funzione così trovata (con punto iniziale e o 1).

---

18. Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali ogni soluzione $y(x)$ dell'equazione differenziale

$$y' - \alpha y = \cos x$$

verifichi la condizione

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-3x} y(x) = 0\,.$$

---

19. Data l'equazione

$$(2 - x)\log(y + e + 1) + y^2 + (x - 1)^2 - e^2 = 0\,,$$

dimostrare che in un intorno del punto $(1, -e)$ essa individua implicitamente una funzione $y = \phi(x)$ oppure $x = \psi(y)$. Trovare lo sviluppo di Taylor del secondo ordine della funzione così trovata (con punto iniziale 1 o $-e$).