ANALISI MATEMATICA II — a.a. 2009-10

Ingegneria Energetica

Prof. Daniela Sforza

Testo consigliato.
Michiel Bertsch, Roberta Dal Passo, Lorenzo Giacomelli – Analisi Matematica– McGraw-Hill.

Testi di esercizi consigliati.
Micol Amar, Alberto M. Bersani – Esercizi di Analisi Matematica, seconda edizione – Esculapio/Progetto Leonardo.
Sergio Campanato – Esercizi e Complementi di Analisi Matematica, seconda parte – Pellegrini.
Paolo Marcellini, Carlo Sbordone – Esercitazioni di Matematica, volume 2, prima e seconda parte – Liguori.
Luisa Moschini, Rosanna Schianchi – Esercizi svolti di Analisi Matematica – Esculapio/Progetto Leonardo

PROGRAMMA

Serie di potenze. Serie di potenze. Lemma fondamentale sulle serie di potenze. Raggio di convergenza. Criteri della radice e del rapporto per la determinazione del raggio di convergenza. Serie di potenze e serie di Taylor. Continuità della funzione somma (senza dimostrazione). Teorema di integrazione termine a termine (senza dimostrazione). Serie di Taylor di $\log(1+x)$ e $\arctan x$. Teorema di derivazione termine a termine. Unicità dello sviluppo in serie di potenze. Esempi ed esercizi.

Funzioni di più variabili. Lo spazio vettoriale $\mathbf{R}^n$. Prodotto scalare. Norma euclidea. Distanza euclidea. Topologia in $\mathbf{R}^2$: intorno sferico, punti interni, esterni, di frontiera, d'accumulazione, isolati. Insiemi aperti e insiemi chiusi. Frontiera e chiusura di un insieme. Insiemi limitati. Teorema di Bolzano-Weierstrass (senza dimostrazione). L'elemento ∞. Limiti e continuità di funzioni di due variabili. Limiti di funzioni da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$. Funzioni limitate. Funzioni continue da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$. Teorema di Weierstrass (senza dimostrazione). Calcolo dei limiti: teorema delle restrizioni. Coordinate polari. Calcolo differenziale: funzioni di due variabili. Derivate direzionali e parziali. Gradiente: proprietà elementari e regola della catena. Differenziabilità. Legame tra differenziabilità, continuità ed esistenza delle derivate parziali. Piano tangente. Teorema del differenziale totale. Derivate di ordine superiore. Funzioni k volte differenziabili. Teorema di Schwarz (senza dimostrazione). Matrice hessiana. Formula di Taylor del secondo ordine per funzioni di due variabili (senza dimostrazione). Estremi liberi. Punti critici. Teorema di Fermat. Punto di sella. Classificazione dei punti critici (senza dimostrazione). Determinazione del massimo assoluto e del minimo assoluto di funzioni continue su insiemi chiusi e limitati. Esempi ed esercizi.

Curve e integrali curvilinei. Curve. Equazioni parametriche di una curva. Sostegno della curva. Esempi di curve piane: circonferenze, ellissi, rette, curve cartesiane. Esempio di curve in $\mathbf{R}^3$: elica cilindrica. Curve chiuse, semplici, curve di Jordan. Curve di classe C^1. Vettore velocità e derivata di una funzione a valori vettoriali. Curve regolari. Significato della regolarità: versore tangente ad una curva. Regolarità di curve grafico. Retta tangente ad una curva. Curve di classe C^1 a tratti. Cambiamento di parametro. Curve rettificabili. Lunghezza di una curva. Lunghezza di una curva di classe C^1. Lunghezza di una curva cartesiana. Integrali curvilinei di prima specie. Gli integrali lungo curve equivalenti sono uguali (senza dimostrazione). Ascissa curvilinea. Campi vettoriali e forme differenziali. Interpretazione fisica in $\mathbf{R}^3$. Integrale curvilineo di seconda specie. Integrali lungo curve equivalenti. Integrali curvilinei di seconda specie su curve regolari. Integrali curvilinei su curve di classe C^1 a tratti. Forme differenziali esatte e funzione potenziale. L'integrale su una curva è uguale alla differenza di potenziale (senza dimostrazione). L'integrale di una forma esatta su una curva chiusa è nullo. Caratterizzazione delle forme esatte: una forma è esatta se e solo se l'integrale curvilineo è invariante per curve con stessi estremi se e solo se l'integrale curvilineo su curve chiuse è nullo (senza dimostrazione). Interpretazione fisica di una forma esatta: campi conservativi ed energia potenziale. Forme chiuse. Le forme esatte sono chiuse. In generale le forme chiuse non sono esatte. Rotore e campi irrotazionali. Una forma è chiusa se solo se il campo vettoriale ad essa associata è irrotazionale. Costruzione della funzione potenziale. Curve omotope. Insiemi semplicemente connessi. Gli insiemi convessi sono semplicemente connessi. Un insieme è semplicemente connesso se e solo se ogni curva chiusa è omotopa ad un punto (senza dimostrazione). Esempi di insiemi semplicemente connessi in $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{R}^3$. Forme chiuse su insiemi semplicemente connessi sono esatte. Gli integrali di forme chiuse sono invarianti per curve omotope (senza dimostrazione). Esempi ed esercizi.

Funzioni implicite. Funzioni implicite. Teorema di Dini o delle funzioni implicite in $\mathbf{R}^2$ per funzioni di classe C^1. Esistenza della derivata delle funzioni implicite (senza dimostrazione). Espressione della derivata prima delle funzioni implicite dedotta dalla regola della catena. Espressione della derivata seconda delle funzioni implicite ottenuta per derivazione. Punti regolari. Curve di livello. Retta tangente alla curva di livello. Esempi ed esercizi.

Integrali multipli. Integrali doppi su rettangoli. Suddivisione di un rettangolo. Somma superiore e somma inferiore. Definizione di funzione integrabile secondo Riemann. Definizione di integrale doppio. Esempio di funzione limitata non integrabile. Criterio di integrabilità (senza dimostrazione). Integrabilità delle funzioni continue su rettangoli (senza dimostrazione). Proprietà dell'integrale: linearità, monotonia, integrabilità della funzione valore assoluto di una funzione integrabile (senza dimostrazione). Teorema della media. Formule di riduzione su rettangoli (senza dimostrazione). Formula di scambio dell'ordine di integrazione. Integrali doppi: il caso generale. Insiemi misurabili secondo Peano-Jordan. Insiemi di misura nulla. Un insieme limitato del piano è misurabile se e solo se la sua frontiera è di misura nulla (senza dimostrazione). Caratterizzazione degli insiemi di misura nulla (senza dimostrazione). Il grafico di una funzione integrabile di una variabile è di misura nulla. Proprietà degli insiemi misurabili (senza dimostrazione). Integrabilità delle funzioni limitate su rettangoli aventi l'insieme dei punti di discontinuità di misura nulla (senza dimostrazione). Integrabilità delle funzioni limitate e continue su insiemi misurabili. Proprietà dell'integrale. Additività rispetto al dominio di integrazione. Domini semplici (o normali) rispetto agli assi. Formule di riduzione per domini semplici. Cambiamento delle variabili di integrazione per gli integrali doppi (senza dimostrazione). Coordinate polari. Altri cambiamenti di variabili. L'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$. Integrali tripli: suddivisione di parallelepipedi, somma inferiore e somma superiore di una funzione limitata su un parallelepipedo, integrale secondo Riemann di funzioni definite su parallelepipedi, integrale secondo Riemann di funzioni definite su insiemi limitati, insiemi misurabili, misura di Peano-Jordan, caratterizzazione degli insiemi misurabili (senza dimostrazione), integrabilità delle funzioni continue e limitate su un insieme misurabile (senza dimostrazione), domini semplici rispetto a uno degli assi. Formule di riduzione per parallelepipedi (senza dimostrazione). Integrazione per fili o per strati. Formule di riduzione per domini semplici rispetto ad un asse (senza dimostrazione). Volume di solidi di rotazione. Cambiamento di variabili. Coordinate cilindriche e sferiche. Formule di Gauss-Green nel piano. Formula di integrazione per parti. Versore normale esterna. Teorema della divergenza. Teorema del rotore o di Stokes nel piano. Esempi ed esercizi.

Equazioni differenziali ordinarie. Introduzione alle equazioni differenziali ordinarie. Esempi di equazioni differenziali presi dalla fisica: legge di Newton, decadimento di una sostanza radioattiva. Equazioni differenziali lineari del primo ordine. Definizione di soluzione. Problema di Cauchy. Equazioni lineari del primo ordine omogenee: integrale generale, soluzione del problema di Cauchy. Equazioni differenziali lineari del primo ordine non omogenee: equazione omogenea associata, la differenza di due soluzioni è soluzione della omogenea associata, integrale generale, soluzione del problema di Cauchy. Metodi per determinare una soluzione particolare di equazioni non omogenee: variazione della costante, metodo *ad hoc* nel caso il termine non omogeneo sia un polinomio o una funzione esponenziale. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine. Definizione di soluzione. Problema di Cauchy. Equivalenza tra un'equazione lineare del secondo ordine e un sistema di due equazioni lineari del primo ordine. Teorema di esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy (senza dimostrazione). Equazioni lineari del secondo ordine omogenee. Soluzioni linearmente indipendenti. Esistenza di soluzioni linearmente indipendenti. Struttura dell'integrale generale di equazioni omogenee. Struttura dell'integrale generale di equazioni non omogenee. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti omogenee: equazione caratteristica, determinazione di due soluzioni linearmente indipendenti. Esempio: oscillatore armonico. Cenni al metodo di riduzione dell'ordine. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine non omogenee: come determinare una soluzione particolare. Metodo di variazione delle costanti. Metodo *ad hoc* nel caso in cui il termine non omogeneo sia un polinomio, una funzione esponenziale, una funzione trigonometrica tipo $\sin x$, $\cos x$ o una combinazione lineare delle suddette funzioni. Cenni alle equazioni differenziali lineari di ordine n: soluzioni linearmente indipendenti, struttura dell'integrale generale. Esempio di un'equazione lineare del terzo ordine a coefficienti costanti con termine non omogeneo del tipo prodotto di un polinomio per un esponenziale. Equazioni del primo ordine in forma normale. Equazioni a variabili separabili. Dominio di esistenza delle soluzioni. Unicità delle soluzioni. Funzioni di due variabili localmente lipschitziane rispetto alla seconda variabile. Teorema di esistenza e unicità locale per la soluzione del problema di Cauchy relativo a equazioni del primo ordine in forma normale (senza dimostrazione). Soluzioni locali e soluzioni globali. Confronto con le equazioni differenziali lineari. Le funzioni di due variabili $f(x, y)$ che ammettono derivata parziale f_y continua, sono localmente lipschitziane rispetto alla seconda variabile y. Concetto di intervallo massimale di definizione della soluzione. Teorema di esistenza dell'intervallo massimale (senza dimostrazione). Teorema di esistenza globale delle soluzioni di equazioni del primo ordine in forma normale (senza dimostrazione). Equazioni differenziali di Bernoulli: verifica delle ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale. Risoluzione di equazioni differenziali di Bernoulli tramite sostituzione. Ricerca di soluzioni globali per equazioni di Bernoulli. Equazioni lineari di Eulero del secondo ordine. Metodo di Frobenius per determinare una soluzione analitica di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine. Esempi: equazione dell'oscillatore armonico, equazione di Bessel di ordine zero. Equazioni differenziali omogenee. Cenni di analisi qualitativa delle soluzioni di equazioni del primo ordine in forma normale. Sistemi 2×2 di equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti costanti: per derivazione ci si riconduce a determinare l'integrale generale di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. Esempi ed esercizi.

Serie di Fourier. Funzioni periodiche. Polinomi trigonometrici. Serie di Fourier di funzioni periodiche di periodo 2π. Giustificazione della forma dei coefficienti di Fourier. Funzioni continue o regolari a tratti su $\mathbf{R}$. Teorema sulla convergenza puntuale delle serie di Fourier (senza dimostrazione). Teorema sulla convergenza in media quadratica delle serie di Fourier (senza dimostrazione). Disuguaglianza di Bessel. Identità di Parseval. Serie di Fourier di funzioni periodiche di periodo $T > 0$. Serie di Fourier di funzioni pari e di funzioni dispari. Rappresentazione complessa delle serie di Fourier. Esercizi sull'applicazione del teorema di convergenza puntuale delle serie di Fourier e determinazione della somma di serie convergenti notevoli. Un'applicazione delle serie di Fourier: l'equazione delle onde. Esempi ed esercizi.