

MISCELLANEA DI ESERCIZI

N.B. Per altre tipologie di esercizi inerenti al programma d'esame, fare riferimento alle prove scritte di anni precedenti.

1. Determinare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{\text{sen}(2x)}{x} dx$$

in termini della somma di una serie.

2. Tracciare un grafico approssimativo della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = |y| + \log x, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

(Non è richiesto lo studio della convessità).

3. Assegnato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = |y| + x^2, \\ y(0) = 0, \end{cases} \quad (P)$$

- (i) tracciare un grafico approssimativo della soluzione di (P);
(ii) determinare esplicitamente la soluzione di (P).
-

4. Determinare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{1 - e^x}{x} dx$$

in termini della somma di una serie.

5. Assegnato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{x}{1 - x^2} y + 3xy^{1/2}, \\ y(2) = 4, \end{cases} \quad (P)$$

- (i) determinare la soluzione di (P);
(ii) determinare l'intervallo massimale di definizione della soluzione di (P).
-

6. Determinare una soluzione dispari in serie di potenze dell'equazione differenziale

$$y'' - xy' + \alpha y = 0,$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$.

7. Determinare l'integrale

$$\int_0^{1/2} \frac{\log(1-x)}{x} dx$$

in termini della somma di una serie.

8. Assegnato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{x}{1-x^2}y + 4xy^{1/2}, \\ y\left(-\frac{1}{2}\right) = 9, \end{cases} \quad (P)$$

(i) determinare la soluzione di (P);

(ii) determinare l'intervallo massimale di definizione della soluzione di (P).

9. Determinare, se esistono, le soluzioni definite in tutto \mathbf{R} dell'equazione differenziale

$$y' = -4e^{4x}y - e^{8x}y^2.$$

10. Assegnato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{x}{1-x^2}y + 5xy^{1/2}, \\ y(-3) = 4, \end{cases} \quad (P)$$

(i) determinare la soluzione di (P);

(ii) determinare l'intervallo massimale di definizione della soluzione di (P).

11. Determinare, se esistono, le soluzioni definite in tutto \mathbf{R} dell'equazione differenziale

$$y' = -5e^{5x}y - e^{10x}y^2.$$

12. Determinare una soluzione pari in serie di potenze dell'equazione differenziale

$$y'' - 3xy' + \alpha y = 0,$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$

13. Tracciare un grafico approssimativo della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = |y| - \log x, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

(Non è richiesto lo studio della convessità).

14. Determinare il minimo assoluto e il massimo assoluto della funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 1$$

nell'insieme $C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + 3z^2 \leq 3\}$.

15. Determinare gli estremi liberi della funzione

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2)^2 + z^2 - 3xy.$$

16. Determinare il minimo assoluto e il massimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = y^2 - x^3$$

nell'insieme $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.