1 - Esprimere l'integrale
$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(x^8)}{x^2}\,dx$$
come somma di una serie.

. . . .

La funzione $\operatorname{sen} t$ è analitica,
$$\operatorname{sen} t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\,, \quad t \in \mathbf{R}\,,$$
e quindi per l'unicità dello sviluppo in serie di potenze, si ha
$$\frac{\operatorname{sen}(x^8)}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{16n+6}}{(2n+1)!}\,, \quad x \in \mathbf{R}\,.$$
In conclusione, per il teorema di integrazione termine a termine si ottiene
$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(x^8)}{x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(16n+7)}\,.$$

---

2 - Assegnato il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = |y| - |x|, \\ y(0) = 0\,, \end{cases} \tag{P}$$
(i) tracciare un grafico approssimativo della soluzione;
(ii) determinarne esplicitamente la soluzione.

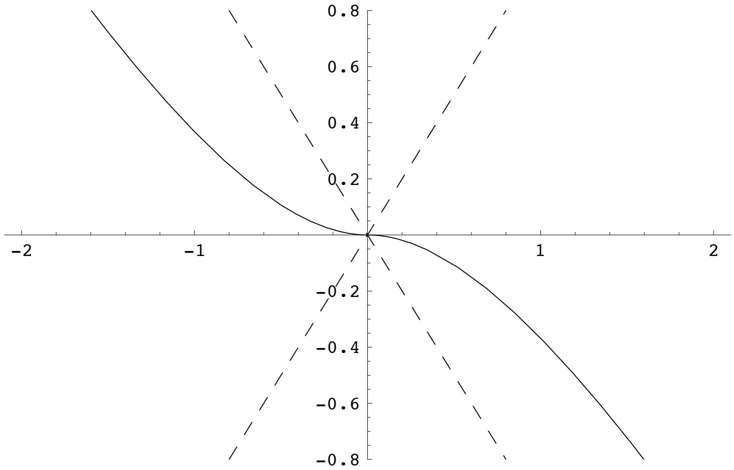
. . . .

(i) La funzione $f(x,y) = |y| - |x|$ è continua in $\mathbf{R}^2$ e per ogni $(x, y_1)\,, (x, y_2) \in \mathbf{R}^2$ si ha
$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \big||y_1| - |x| - |y_2| + |x|\big| = \big||y_1| - |y_2|\big| \le \big|y_1 - y_2\big|\,,$$
cioè f è globalmente lipschitziana in $\mathbf{R}^2$ rispetto alla seconda variabile y, uniformemente rispetto alla variabile x. Pertanto, per il teorema di esistenza globale esiste una ed una sola soluzione di (P) definita in tutto $\mathbf{R}$.
È utile studiare la monotonia delle soluzioni. Infatti, le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = |y| - |x|$ sono strettamente crescenti per $|y| > |x|$, ovvero per $y < -|x|$ o $y > |x|$, mentre sono strettamente decrescenti per $|y| < |x|$, cioè $-|x| < y < |x|$.
Inoltre, detta $y(x)$ la soluzione di (P) e posto $u(x) = -y(-x)$, si ha
$$u'(x) = y'(-x) = |y(-x)| - |-x| = |u(x)| - |x| \quad x \in \mathbf{R}\,, \qquad u(0) = 0\,,$$
cioè anche $u(x)$ è soluzione di (P) e quindi per l'unicità si ha
$$y(x) = -y(-x) \qquad x \in \mathbf{R}\,,$$
cioè $y(x)$ è dispari. Pertanto $y(x)$ risulta simmetrica rispetto all'origine, e quindi per tracciare un grafico approssimativo basterà studiare il problema di Cauchy per $x > 0$, cioè
$$\begin{cases} y' = |y| - x, & x > 0\,, \\ y(0) = 0\,, \end{cases}$$
Dallo studio della monotonia, segue che per $x > 0$ o la soluzione è crescente oppure è decrescente. Se la soluzione $y(x)$ fosse crescente per $x > 0$, si avrebbe necessariamente $y(x) > y(0) = 0$, e quindi
$$y'(x) = y(x) - x \qquad x > 0\,.$$
Derivando tale equazione, si avrebbe $y''(x) = y'(x) - 1$, $x > 0$, da cui, tenendo conto di $y'(0) = 0$, si otterrebbe $y''_+(0) = -1$, in contrasto con la condizione assunta che $y(x)$ cresca a destra di 0. Pertanto, necessariamente $y(x)$ è decrescente per $x > 0$, e quindi $y(x) < y(0) = 0$.

Inoltre, $y(x)$ si mantiene sempre al di sopra della bisettrice $g(x) = -x$, in quanto se esistesse un punto $x_0 > 0$ tale che $y(x_0) = g(x_0)$, si avrebbe un assurdo:

$$0 = y'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} \le \lim_{x \to x_0^-} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = -1\,.$$

Infine, utilizzando il teorema dell'asintoto si può provare che $\lim_{x \to +\infty} y(x) = -\infty$.
Grazie alle considerazioni fatte, si può tracciare un grafico approssimativo della soluzione:



(ii) Per determinare esplicitamente la soluzione, basterà risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -y - x, & x \ge 0 \\ y(0) = 0\,, \end{cases} \tag{P_1}$$

e poi tener conto della disparità di $y(x)$. Infatti, la soluzione di (P_1) è data da

$$y(x) = -e^{-x} - x + 1 \quad x \ge 0\,,$$

e quindi, se $x < 0$ si ha

$$y(x) = -y(-x) = -[-e^{x} + x + 1] = e^{x} - x - 1\,.$$

In conclusione, la soluzione di (P) è data da

$$y(x) = \begin{cases} -e^{-x} - x + 1\,, & \text{se } x \ge 0 \\ e^{x} - x - 1\,, & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

---

3 - Determinare gli eventuali estremi liberi della funzione

$$f(x, y, z) = 2yz - (x-1)^2 - (y^2 + z^2)^2\,.$$

....

In primo luogo si osservi che $f \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$, e di conseguenza si può applicare il teorema di Fermat: i punti di estremo sono necessariamente punti critici.
Per ogni $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ il gradiente di f è dato da

$$\nabla f(x, y, z) = \big(-2(x-1), 2z - 4y(y^2+z^2), 2y - 4z(y^2+z^2)\big)\,,$$

e si annulla nei punti $P_1 := (1, 0, 0)$, $P_2 := \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $P_3 := \left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.
Per classificare i punti critici P_1, P_2 e P_3 si possono utilizzare le condizioni sufficienti basate sul segno della forma quadratica associata alla matrice hessiana.
La matrice hessiana di f calcolata nel generico punto $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ è data da

$$D^2 f(x, y, z) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -12y^2 - 4z^2 & 2 - 8yz \\ 0 & 2 - 8yz & -12z^2 - 4y^2 \end{pmatrix}.$$

Si osservi ora che

$$D^2 f(P_1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

e di conseguenza $\left|D^2 f(P_1) - \lambda I\right| = -(2+\lambda)(\lambda^2 - 4) = 0$ se e solo se $\lambda = -2$ e $\lambda = 2$. Pertanto, la matrice $D^2 f(P_1)$ è indefinita, perché ha autovalori di segno opposto, e quindi P_1 è punto di sella.
Inoltre,

$$D^2 f(P_2) = D^2 f(P_3) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

e di conseguenza $\left|D^2 f(P_2) - \lambda I\right| = \left|D^2 f(P_3) - \lambda I\right| = -(2+\lambda)(4+\lambda)^2 = 0$ se e solo se $\lambda = -2$ e $\lambda = -4$. Pertanto, le matrici $D^2 f(P_2)$ e $D^2 f(P_3)$ sono definite negative, perché hanno solo autovalori negativi, e quindi P_2 e P_3 sono punti di massimo locale.
Si può stabilire che le matrici $D^2 f(P_2)$ e $D^2 f(P_3)$ sono definite negative anche valutando il segno dei minori principali di nord-ovest: infatti si ha

$$-2 < 0\,, \qquad \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 8 > 0\,, \qquad \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -32 < 0\,.$$

In conclusione, il valore

$$f(P_2) = f(P_3) = \frac{1}{4}$$

è un massimo locale per f.