1 - Determinare la serie di potenze avente per somma la funzione

$$f(x) = \log \frac{1+3x^2}{1-3x^2}\,,$$

in un intervallo centrato in 0. Calcolare $f^{(98)}(0)$ e $f^{(99)}(0)$.

....

Dallo sviluppo in serie di Taylor della funzione $\log(1+t)$

$$\log(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1}\,, \quad |t| < 1\,,$$

segue

$$\log(1-t) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}\,, \quad |t| < 1\,,$$

e di conseguenza

$$f(t) = \log\frac{1+t}{1-t} = \log(1+t) - \log(1-t) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\,, \quad |t| < 1\,.$$

Per l'unicità dello sviluppo in serie di potenze, si ha

$$f(x) = \log\frac{1+3x^2}{1-3x^2} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2n+1} x^{4n+2}\,, \quad |x| < 1/\sqrt{3}\,.$$

Inoltre, tenendo conto della definizione di serie di Taylor, si ha

$$f^{(98)}(0) = 2\frac{3^{49}}{49}(98)! = 4\;3^{49}(97)!\,,$$

in quanto l'equazione $4n+2 = 98$ ha soluzione $n = 24$, mentre $f^{(99)}(0) = 0$ perchè l'equazione $4n+2 = 99$ non ha soluzione in $\mathbf{N}$.

---

2 - (a) Verificare le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per l'equazione differenziale

$$y' = -y\log x - x^{2x+1}y^3\,. \tag{1}$$

(b) Determinare, se esistono, tutte le soluzioni globali di (1).
(c) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -y\log x - x^{2x+1}y^3, \\ y(1/2) = -2\sqrt{e}\,, \end{cases}$$

e il suo intervallo massimale di definizione.
(d) Esiste una soluzione di (1) asintoticamente stabile?

....

(a) La funzione $f(x,y) = -y\log x - x^{2x+1}y^3$ è continua in $(0,\infty)\times\mathbf{R}$. Inoltre, per ogni $(x,y) \in (0,\infty)\times\mathbf{R}$ si ha

$$f_y(x,y) = -\log x - 3x^{2x+1}y^2\,,$$

e quindi, essendo $f_y(x,y)$ continua, la funzione f è localmente lipschitziana in $(0,\infty)\times\mathbf{R}$ rispetto alla seconda variabile y, uniformemente rispetto alla variabile x; ne segue che sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per l'equazione differenziale assegnata.
(b) L'equazione differenziale assegnata è di Bernoulli e ammette la soluzione identicamente nulla $y = 0$. Per il teorema di esistenza e unicità locale ogni altra soluzione $y(x)$ di (1) non si annullerà in alcun punto e sarà sempre positiva o sempre negativa. Pertanto, posto $z = y^{-2}$, l'equazione assegnata si trasforma nella seguente equazione lineare in z

$$z' = 2z\log x + 2x^{2x+1},$$

e il suo integrale generale è dato da

$$z(x) = x^{2x}\left(Ce^{-2x} + x - \frac{1}{2}\right), \qquad C \in \mathbf{R}\,.$$

Tenendo conto di $|y| = z^{-1/2}$, si ha

$$|y(x)| = \frac{1}{x^x\left(Ce^{-2x} + x - \frac{1}{2}\right)^{1/2}}\,, \qquad C \in \mathbf{R}\,.$$

Pertanto, le soluzioni di (1) sono globali, cioè definite in $(0, \infty)$, se la funzione

$$g(x) = Ce^{-2x} + x - \frac{1}{2} > 0\,, \qquad \forall x > 0\,.$$

Si osservi ora che $g(0) = C - \frac{1}{2}$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, e quindi per $C < \frac{1}{2}$ la funzione g non è sempre positiva, da cui segue che per $C < \frac{1}{2}$ le soluzioni di (1) non sono globali.
Se invece $C \geq \frac{1}{2}$, per la disuguaglianza notevole $e^t \geq t + 1$, $t \in \mathbf{R}$, si ha

$$g(x) \geq \frac{1}{2}\big(e^{-2x} + 2x - 1\big) > 0 \qquad \forall x > 0\,,$$

e di conseguenza per ogni $C \geq \frac{1}{2}$ le soluzioni di (1) sono globali, cioè sono definite in $(0, +\infty)$.
(c) La soluzione è

$$y(x) = -\frac{1}{x^x\left(\frac{1}{2}e^{-2x} + x - \frac{1}{2}\right)^{1/2}}$$

e il suo intervallo massimale di definizione è $(0, +\infty)$.
(d) La soluzione $y = 0$ è asintoticamente stabile, in quanto per ogni $C \in \mathbf{R}$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} |y(x)| = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{\log x(x+1/2)}\left(C\frac{e^{-2x}}{x} + 1 - \frac{1}{2x}\right)^{1/2}} = 0\,,$$

(anche le soluzioni non globali sono sempre definite in intervalli illimitati superiormente, in quanto la funzione $g(x)$ è strettamente crescente).

---

3 - Determinare il minimo assoluto e il massimo assoluto della funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2$$

nell'insieme $C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 5x^2 + y^2 + z^2 \leq 5\}$.

. . . .

La funzione f è continua in $\mathbf{R}^3$, e di conseguenza per il teorema di Weierstrass f ammette minimo assoluto e massimo assoluto nell'insieme compatto C.
Si osservi che $f \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$, e di conseguenza si può applicare il teorema di Fermat: i punti di estremo interni a C sono necessariamente punti critici.
Per ogni $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ il gradiente di f è dato da

$$\nabla f(x, y, z) = \big(2x, 2y - 4, 2z\big)\,,$$

e si annulla nel punto $P_1 = (0, 2, 0)$, che è interno a C. Si osservi che la matrice hessiana $D^2 f(x, y, z)$ è definita positiva per ogni $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, e di conseguenza P_1 è punto di minimo globale, cioè

$$\min_{(x,y,z)\in C} f(x, y, z) = \min_{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3} f(x, y, z) = f(P_1) = -6\,.$$

Per determinare gli estremi di f sulla frontiera $\partial C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 5x^2 + y^2 + z^2 - 5 = 0\}$ di C, si può utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. I punti di ∂C sono tutti regolari e la funzione lagrangiana è data da

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2 - \lambda(5x^2 + y^2 + z^2 - 5)\,,$$

e di conseguenza

$$\nabla\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = \big(2x(1 - 5\lambda), 2(1 - \lambda)y - 4, 2z(1 - \lambda), -(5x^2 + y^2 + z^2 - 5)\big)\,.$$

Per risolvere il sistema $\nabla\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = \mathbf{0}$ occorre risolvere i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ (1-\lambda)y - 2 = 0 \\ z = 0 \\ 5x^2 + y^2 + z^2 - 5 = 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = 1/5 \\ (1-\lambda)y - 2 = 0 \\ z = 0 \\ 5x^2 + y^2 + z^2 - 5 = 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} x(1-5\lambda) = 0 \\ (1-\lambda)y - 2 = 0 \\ \lambda = 1 \\ 5x^2 + y^2 + z^2 - 5 = 0\,, \end{cases}$$

Solo il primo sistema ha soluzioni $P_2 = (0, \sqrt{5}, 0)$ e $P_3 = (0, -\sqrt{5}, 0)$, mentre il secondo non ha soluzioni reali e il terzo risulta impossibile. Pertanto P_2 e P_3 sono i punti critici vincolati a ∂C.
In conclusione, per determinare il massimo assoluto di f nell'insieme compatto C si devono confrontare i valori

$$f(P_2) = 3 - 4\sqrt{5}\,, \qquad f(P_3) = 3 + 4\sqrt{5}\,,$$

e di conseguenza

$$\max_{(x,y,z)\in C} f(x, y, z) = f(P_3) = 3 + 4\sqrt{5}\,.$$