1 - Esprimere l'integrale

$$\int_0^1 \frac{1-\cos(3x)}{x^2}\,dx$$

come somma di una serie numerica.

....

La funzione $\cos t$ è analitica,

$$\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}\,, \qquad t \in \mathbf{R}\,,$$

e quindi per l'unicità dello sviluppo in serie di potenze, si ha

$$\frac{1-\cos(3x)}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^{2n} x^{2n-2}}{(2n)!}\,, \qquad x \in \mathbf{R}\,.$$

In conclusione, per il teorema di integrazione termine a termine si ottiene

$$\int_0^1 \frac{1-\cos(3x)}{x^2}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^{2n}}{(2n)!(2n-1)}\,.$$

---

2 - (a) Verificare le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per l'equazione differenziale

$$y' = (\cos x - 1)y - e^{-\operatorname{sen} x} y^2\,. \tag{1}$$

(b) Determinare, se esistono, tutte le soluzioni globali di (1).
(c) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (\cos x - 1)y - e^{-\operatorname{sen} x} y^2, \\ y(\pi) = e^{-\pi/2}\,, \end{cases}$$

e il suo intervallo massimale di definizione.

....

(a) La funzione

$$f(x,y) = (\cos x - 1)y - e^{-\operatorname{sen} x} y^2$$

è continua in $\mathbf{R}^2$. Inoltre, per ogni $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ si ha

$$f_y(x,y) = (\cos x - 1) - 2e^{-\operatorname{sen} x} y\,,$$

e quindi, essendo $f_y(x,y)$ continua, la funzione f è localmente lipschitziana in $\mathbf{R}^2$ rispetto alla seconda variabile y, uniformemente rispetto alla variabile x; ne segue che sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per l'equazione differenziale assegnata.
(b) L'equazione differenziale assegnata è di Bernoulli e ammette la soluzione identicamente nulla $y = 0$. Per il teorema di esistenza e unicità locale ogni altra soluzione $y(x)$ di (1) non si annullerà in alcun punto e sarà sempre positiva o sempre negativa. Pertanto, posto $z = y^{-1}$, l'equazione assegnata si trasforma nella seguente equazione lineare in z

$$z' = (1 - \cos x)z + e^{-\operatorname{sen} x}.$$

L'integrale generale dell'equazione lineare è dato da

$$z(x) = e^{x - \operatorname{sen} x}\left(C - e^{-x}\right), \qquad C \in \mathbf{R}\,,$$

e di conseguenza

$$y(x) = \frac{e^{\operatorname{sen} x - x}}{C - e^{-x}}\,, \qquad C \in \mathbf{R}\,.$$

Pertanto, per ogni $C \leq 0$ le soluzioni di (1) sono globali, cioè definite in tutto $\mathbf{R}$. Se invece $C > 0$ l'equazione

$$C - e^{-x} = 0$$

ha soluzione $x_0 = -\log C$, e quindi la corrispondente $y(x)$ non è definita in tutto $\mathbf{R}$.

(c) La soluzione è

$$y(x) = \frac{e^{\operatorname{sen} x - x}}{e^{-\pi/2} + e^{-\pi} - e^{-x}}$$

e il suo intervallo massimale di definizione è $(\pi - \log(e^{\pi/2} + 1), +\infty)$.

---

3 - Determinare il minimo assoluto e il massimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = 9x^2 - 2y^3$$

nell'insieme $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 12\}$.

....

La funzione f è continua in $\mathbf{R}^2$, e di conseguenza per il teorema di Weierstrass f ammette minimo assoluto e massimo assoluto nell'insieme compatto C.
Si osservi che $f \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$, e di conseguenza si può applicare il teorema di Fermat: i punti di estremo interni a C sono necessariamente punti critici.
Per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ il gradiente di f è dato da

$$\nabla f(x, y) = \left(18x, -6y^2\right),$$

e si annulla nel punto $P_1 = (0, 0)$, che è interno a C.
Per determinare gli estremi di f sulla frontiera $\partial C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 12\}$ di C, si può utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. I punti di ∂C sono tutti regolari e la funzione lagrangiana è data da

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 9x^2 - 2y^3 - \lambda(x^2 + y^2 - 12),$$

e di conseguenza

$$\nabla\mathcal{L}(x, y, \lambda) = \left(2x(9 - \lambda), -2y(3y + \lambda), -(x^2 + y^2 - 12)\right).$$

Per risolvere $\nabla\mathcal{L}(x, y, \lambda) = \mathbf{0}$ occorre risolvere i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x^2 + y^2 - 12 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ 3y + \lambda = 0 \\ x^2 + y^2 - 12 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 9 - \lambda = 0 \\ y = 0 \\ x^2 + y^2 - 12 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 9 - \lambda = 0 \\ 3y + \lambda = 0 \\ x^2 + y^2 - 12 = 0. \end{cases}$$

Il primo sistema è impossibile, il secondo ha soluzioni $P_2 = (0, 2\sqrt{3})$ e $P_3 = (0, -2\sqrt{3})$, il terzo ha soluzioni $P_4 = (2\sqrt{3}, 0)$ e $P_5 = (-2\sqrt{3}, 0)$ e infine il quarto ha soluzioni $P_6 = (\sqrt{3}, -3)$ e $P_7 = (-\sqrt{3}, -3)$. Pertanto i punti P_i, $i = 2, \ldots, 7$, sono i punti critici vincolati a ∂C.
In conclusione, per determinare il minimo assoluto e il massimo assoluto di f nell'insieme compatto C si devono confrontare i valori

$$f(P_1) = 0, \quad f(P_2) = -48\sqrt{3}, \quad f(P_3) = 48\sqrt{3}, \quad f(P_4) = 108, \quad f(P_6) = 81,$$

e di conseguenza

$$\min_{(x,y)\in C} f(x, y) = f(P_2) = -48\sqrt{3}, \qquad \max_{(x,y)\in C} f(x, y) = f(P_4) = 108.$$

Si osservi che si giunge allo stesso risultato se si ricava x^2 dall'equazione del vincolo, cioè $x^2 = 12 - y^2$, e si determinano il minimo assoluto e il massimo assoluto della funzione di una variabile $g(y) := 9(12 - y^2) - 2y^3$ per $|y| \leq 2\sqrt{3}$.