1 - Determinare la serie di potenze avente per somma la funzione

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(5x)}{x},$$

in un intervallo centrato in 0. Calcolare $f^{(81)}(0)$ e $f^{(82)}(0)$.

....

Dallo sviluppo in serie di Taylor della funzione $\operatorname{sen} t$

$$\operatorname{sen} t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad t \in \mathbf{R},$$

segue

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(5x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Per l'unicità dello sviluppo in serie di potenze e tenendo conto della definizione di serie di Taylor, si ha $f^{(81)}(0) = 0$, in quanto f è somma di potenze pari, mentre

$$f^{(82)}(0) = -\frac{5^{83}}{83},$$

in quanto $2n = 82$ per $n = 41$.

---

2 - Determinare una soluzione $y(x)$ in serie di potenze dell'equazione differenziale

$$y'' - xy' + 5y = 0$$

tale che $y(0) = 0$.

....

Si cerca la soluzione come serie di potenze

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

con $a_0 = 0$, perchè si è tenuto conto della condizione $y(0) = 0$. Le derivate di $y(x)$ sono:

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \qquad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2},$$

e di conseguenza $y(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale assegnata se vale l'identità

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k + 5 \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = 0.$$

Isolando il termine $k = 2$ nella prima somma e operando il cambio di variabile $n = k - 2$, sempre nella prima somma, si ha

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - (n-5) a_n] x^n = 0,$$

da cui segue $a_2 = 0$ e

$$a_{n+2} = \frac{(n-5)}{(n+2)(n+1)} a_n.$$

In conclusione, si ha

$$y(x) = a_1 (x - \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{15} x^5).$$

---

3 - Determinare il minimo assoluto e il massimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = x^2 - 2$$

nell'insieme $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 13x^2 + 4y^2 = 4\}$.

....

La funzione f è continua in $\mathbf{R}^2$, e di conseguenza per il teorema di Weierstrass f ammette minimo assoluto e massimo assoluto nell'insieme compatto C.
Per determinare gli estremi di f su C, si può utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. I punti di C sono tutti regolari e la funzione lagrangiana è data da

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 - 2 - \lambda(13x^2 + 4y^2 - 4)\,,$$

e di conseguenza

$$\nabla\mathcal{L}(x,y,\lambda) = \big(2x(1-13\lambda), -8\lambda y, -(13x^2+4y^2-4)\big)\,.$$

Per risolvere il sistema $\nabla\mathcal{L}(x,y,\lambda) = \mathbf{0}$ occorre risolvere i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ \lambda = 0 \\ 13x^2 + 4y^2 - 4 = 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 13x^2 + 4y^2 - 4 = 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = 1/13 \\ \lambda = 0 \\ 13x^2 + 4y^2 - 4 = 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = 1/13 \\ y = 0 \\ 13x^2 + 4y^2 - 4 = 0\,, \end{cases}$$

Solo il primo e l'ultimo sistema hanno soluzioni, date rispettivamente da $(0, \pm 1)$ e $(\pm 2/\sqrt{13}, 0)$, e tali punti sono i punti critici di f vincolati a C.
In conclusione, per determinare il minimo assoluto e il massimo assoluto di f nell'insieme compatto C si devono confrontare i valori

$$f(0,\pm 1) = -2\,, \qquad f(\pm 2/\sqrt{13}, 0) = -\frac{22}{13}\,,$$

e di conseguenza

$$\min_{(x,y)\in C} f(x,y) = -2\,, \qquad \max_{(x,y)\in C} f(x,y) = -\frac{22}{13}\,.$$

Si giunge alla stessa conclusione se si pone $x^2 = \dfrac{4}{13}(1-y^2)$ nell'espressione di f e si determinano il minimo assoluto e il massimo assoluto della funzione di una variabile $g(y) := \dfrac{4}{13}(1-y^2) - 2$ nell'intervallo $[-1,1]$.