1 - Esprimere l'integrale

$$\int_0^{1/3} \frac{\log(1+2x)}{x}\, dx$$

come somma di una serie numerica.

. . . .

La funzione $\log(1+t)$ è analitica,

$$\log(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1}\,, \qquad |t| < 1\,,$$

e quindi per l'unicità dello sviluppo in serie di potenze, si ha

$$\frac{\log(1+2x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n+1}}{n+1} x^n\,, \qquad |x| < 1/2\,.$$

Pertanto, tenendo conto che l'intervallo di integrazione $[0, 1/3]$ è contenuto in $(-1/2, 1/2)$, per il teorema di integrazione termine a termine si ottiene

$$\int_0^{1/3} \frac{\log(1+2x)}{x}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} \frac{1}{3^{n+1}}\,.$$

---

2 - (a) Verificare le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per l'equazione differenziale

$$y' = 2y + xy^2\,. \tag{1}$$

(b) Determinare, se esistono, tutte le soluzioni globali di (1).
(c) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2y + xy^2, \\ y(0) = -4\,, \end{cases}$$

e il suo intervallo massimale di definizione.

. . . .

(a) La funzione $f(x, y) = 2y + xy^2$ è continua in $\mathbf{R}^2$. Inoltre, per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ si ha

$$f_y(x, y) = 2 + 2xy\,,$$

e quindi, essendo $f_y(x, y)$ continua, la funzione f è localmente lipschitziana in $\mathbf{R}^2$ rispetto alla seconda variabile y, uniformemente rispetto alla variabile x; ne segue che sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per l'equazione differenziale assegnata.
(b) L'equazione differenziale assegnata è di Bernoulli e ammette la soluzione identicamente nulla $y = 0$. Per il teorema di esistenza e unicità locale ogni altra soluzione $y(x)$ di (1) non si annullerà in alcun punto e sarà sempre positiva o sempre negativa. Pertanto, posto $z = \dfrac{1}{y}$, l'equazione assegnata si trasforma nella seguente equazione lineare in z

$$z' = -2z - x,$$

e il suo integrale generale è dato da

$$z(x) = Ce^{-2x} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\,, \qquad C \in \mathbf{R}\,.$$

Tenendo conto di $y = \dfrac{1}{z}$, si ha

$$y(x) = \frac{1}{Ce^{-2x} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}}\,, \qquad C \in \mathbf{R}\,.$$

Pertanto, le soluzioni di (1) sono globali, cioè definite in $\mathbf{R}$, se

$$z(x) = Ce^{-2x} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \neq 0\,, \qquad \forall x \in \mathbf{R}\,.$$

Si osservi ora che $\lim\limits_{x \to +\infty} z(x) = -\infty$ e $z(0) = C + \dfrac{1}{4}$, e quindi per $C \geq -\dfrac{1}{4}$ la funzione z non è sempre strettamente negativa, da cui segue che per $C \geq -\dfrac{1}{4}$ le soluzioni di (1) non sono globali.

Se invece $C < -\dfrac{1}{4}$, per la disuguaglianza notevole $e^t \geq t+1$, $t \in \mathbf{R}$, si ha

$$z(x) < -\frac{1}{4}\big(e^{-2x} + 2x - 1\big) < 0 \qquad \forall x \in \mathbf{R}\,,$$

e di conseguenza per ogni $C < -\dfrac{1}{4}$ le soluzioni di (1) sono globali, cioè sono definite in $\mathbf{R}$.
(c) Imponendo la condizione iniziale $y(0) = -4$, si ha $C = -1/2$. Pertanto, la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = -\frac{4}{2e^{-2x} + 2x - 1}$$

e il suo intervallo massimale di definizione è tutto $\mathbf{R}$, in quanto $C = -\dfrac{1}{2} < -\dfrac{1}{4}$.

---

3 - Determinare i punti critici della funzione

$$f(x,y,z) = xy(x+2) + z^2\,,$$

e classificarli.

. . . .

Per ogni $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ il gradiente di f è dato da

$$\nabla f(x,y,z) = \big(2y(x+1), x(x+2), 2z\big)\,,$$

e si annulla nei punti $P_1 := (0,0,0)$ e $P_2 := (-2,0,0)$.
Per classificare i punti critici P_1 e P_2 si possono utilizzare le condizioni sufficienti basate sul segno della forma quadratica associata alla matrice hessiana.
La matrice hessiana di f calcolata nel generico punto $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ è data da

$$D^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y & 2(x+1) & 0 \\ 2(x+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si osservi ora che

$$D^2 f(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

e di conseguenza $\big|D^2 f(P_1) - \lambda I\big| = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4) = 0$ se e solo se $\lambda = 2$ e $\lambda = -2$. Pertanto, la matrice $D^2 f(P_1)$ è indefinita, perché ha autovalori di segno opposto, e quindi P_1 è punto di sella.
Inoltre,

$$D^2 f(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

di conseguenza $\big|D^2 f(P_2) - \lambda I\big| = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4) = 0$ se e solo se $\lambda = 2$ e $\lambda = -2$, e quindi anche P_2 è punto di sella.