1 - Determinare la serie di potenze avente per somma la funzione

$$f(x) = \frac{\cos(5x) - 1}{x^2},$$

in un intervallo centrato in 0. Calcolare $f^{(80)}(0)$, $f^{(81)}(0)$ e $f^{(82)}(0)$.

....

La funzione $\cos t$ è analitica,

$$\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}, \quad t \in \mathbf{R},$$

e quindi per l'unicità dello sviluppo in serie di potenze, si ha

$$f(x) = \frac{\cos(5x) - 1}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{2n} x^{2n-2}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Inoltre $f^{(80)}(0) = -\dfrac{5^{82}}{(81)(82)}$ $(2n-2 = 80$ per $n = 41)$, $f^{(81)}(0) = 0$ (f è una funzione pari) e $f^{(82)}(0) = \dfrac{5^{84}}{(83)(84)}$ $(2n-2 = 82$ per $n = 42)$.

---

2 - (a) Verificare le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per l'equazione differenziale

$$y' = \frac{1}{x} y - 2e^x y^2, \qquad x > 0. \tag{1}$$

(b) Determinare, se esistono, le soluzioni di (1) definite in $(0, \infty)$.
(c) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} y - 2e^x y^2, & x > 0, \\ y(2) = e^{-2}, \end{cases}$$

e il suo intervallo massimale di definizione.

....

(a) La funzione $f(x, y) = \dfrac{1}{x} y - 2e^x y^2$ è continua in $(0, \infty) \times \mathbf{R}$. Inoltre, per ogni $(x, y) \in (0, \infty) \times \mathbf{R}$ si ha

$$f_y(x, y) = \frac{1}{x} - 4e^x y,$$

e quindi, essendo $f_y(x, y)$ continua, la funzione f è localmente lipschitziana in $(0, \infty) \times \mathbf{R}$ rispetto alla seconda variabile y, uniformemente rispetto alla variabile x; ne segue che sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per l'equazione differenziale assegnata.
(b) L'equazione differenziale assegnata è di Bernoulli e ammette la soluzione identicamente nulla $y = 0$. Per il teorema di esistenza e unicità locale ogni altra soluzione $y(x)$ di (1) non si annullerà in alcun punto e sarà sempre positiva o sempre negativa. Pertanto, posto $z = \dfrac{1}{y}$, l'equazione assegnata si trasforma nella seguente equazione lineare in z

$$z' = -\frac{1}{x} z + 2e^x, \quad x > 0,$$

e il suo integrale generale è dato da

$$z(x) = \frac{1}{x}(C + 2e^x(x - 1)), \qquad C \in \mathbf{R}, \quad x > 0.$$

Tenendo conto di $y = \dfrac{1}{z}$, si ha

$$y(x) = \frac{x}{C + 2e^x(x - 1)}, \qquad C \in \mathbf{R}.$$

Pertanto, le soluzioni di (1) sono definite in $(0, \infty)$, se

$$g(x) := C + 2e^x(x - 1) \neq 0, \qquad \forall x > 0.$$

Si osservi ora che $g(0) = C - 2$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, e quindi se $C < 2$ per il teorema degli zeri la funzione g ammette almeno uno zero. Pertanto, per $C < 2$ le soluzioni di (1) non sono definite in tutto l'intervallo $(0, \infty)$.
Nel caso $C \geq 2$ occorre un'ulteriore analisi. Infatti, si noti che

$$g'(x) = 2e^x(x-1) + 2e^x = 2xe^x > 0 \qquad \forall x > 0\,,$$

e quindi g è strettamente crescente in $(0, \infty)$, cioè

$$g(x) > g(0) = C - 2 \geq 0 \qquad \forall x > 0\,.$$

Pertanto, per ogni $C \geq 2$ le soluzioni di (1) sono definite in tutto l'intervallo $(0, \infty)$.
Si giunge alla stessa conclusione se si scrive

$$g(x) = e^x(Ce^{-x} + 2x - 2)$$

e si utilizza la disuguaglianza notevole $e^t > t + 1$, $\forall t \in \mathbf{R}\,, t \neq 0$, in modo che per ogni $C \geq 2$ si abbia

$$g(x) \geq 2e^x(e^{-x} + x - 1) > 0 \qquad \forall x > 0\,.$$

(c) Imponendo la condizione iniziale $y(2) = e^{-2}$, si ottiene $C = 0$. Pertanto, la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{x}{2e^x(x-1)}$$

e il suo intervallo massimale di definizione è $(1, \infty)$, in quanto il punto iniziale 2 appartiene a tale intervallo o anche perché, vista la condizione iniziale, la soluzione deve essere necessariamente positiva.

---

3 - Determinare i punti critici della funzione

$$f(x, y, z) = x(y-5)^2 - z(z+6)\,,$$

e classificarli.

. . . .

Per ogni $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ il gradiente di f è dato da

$$\nabla f(x, y, z) = \big((y-5)^2, 2x(y-5), -2z-6\big)\,,$$

e si annulla nei punti $(x_0, 5, -3)$, $x_0 \in \mathbf{R}$.
Per classificare i punti critici si possono utilizzare le condizioni sufficienti basate sul segno della forma quadratica associata alla matrice hessiana.
La matrice hessiana di f calcolata nel generico punto $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ è data da

$$D^2 f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 2(y-5) & 0 \\ 2(y-5) & 2x & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Si osservi ora che

$$D^2 f(x_0, 5, -3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

e di conseguenza gli autovalori di $D^2 f(x_0, 5, -3)$ sono necessariamente 0, $2x_0$ e -2. Pertanto, se $x_0 > 0$ la matrice $D^2 f(x_0, 5, -3)$ è indefinita, perché ha autovalori di segno opposto, e quindi $(x_0, 5, -3)$ è punto di sella.
Invece, nel caso $x_0 \leq 0$ la matrice $D^2 f(x_0, 5, -3)$ è non nulla e semidefinita negativa, e di conseguenza si può solo affermare che $(x_0, 5, -3)$ non è punto di minimo relativo.
Per stabilire la natura del punto critico, occorre ricorrere alla definizione di estremi liberi e valutare il segno della seguente espressione

$$f(x, y, z) - f(x_0, 5, -3) = x(y-5)^2 - z^2 - 6z - 9 = x(y-5)^2 - (z+3)^2\,; \tag{2}$$

tale quantità è non positiva per $x \leq 0$.
Pertanto, se $x_0 < 0$ poiché l'insieme $A := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 :\ x < 0\}$ è aperto, esiste un intorno sferico $B_r(x_0, 5, -3) \subset A$ (basta prendere $0 < r < -x_0$), e di conseguenza, grazie a (2),

$$f(x, y, z) \leq f(x_0, 5, -3) \qquad \forall (x, y, z) \in B_r(x_0, 5, -3)$$

cioè $(x_0, 5, -3)$ è punto di massimo relativo.
Infine, è facile verificare che $(0, 5, -3)$ è punto di sella, in quanto, ancora grazie a (2) sul piano $z = -3$ si ha

$$f(x, y, -3) - f(x_0, 5, -3) = x(y-5)^2\,,$$

e di conseguenza per ogni $x > 0$ si ha $f(x, y, -3) > f(0, 5, -3)$, mentre per $x < 0$ si ha $f(x, y, -3) < f(0, 5, -3)$.