1 - (a) Verificare che la funzione $\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ è analitica.
(b) Scrivere l'integrale

$$\int_0^1 \frac{\sinh(4x^5)}{x^3}\, dx$$

come somma di una serie.

. . . .

(a) La funzione $\sinh t$ è analitica, in quanto

$$\begin{aligned}\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^k}{k!}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\,, \qquad t \in \mathbf{R}\,.\end{aligned}$$

(b) Per l'unicità dello sviluppo in serie di potenze si ha

$$\frac{\sinh(4x^5)}{x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{10n+2}\,, \quad x \in \mathbf{R}\,.$$

In conclusione, per il teorema di integrazione termine a termine si ottiene

$$\int_0^1 \frac{\sinh(4x^5)}{x^3}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{2n+1}}{(2n+1)!(10n+3)}\,.$$

---

2 - (a) Verificare le ipotesi del teorema di esistenza globale per l'equazione differenziale

$$y' = |y| - e^x\,.$$

(b) Tracciare un grafico approssimativo della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = |y| - e^x \\ y(0) = 0\,. \end{cases} \tag{P}$$

(c) Determinare esplicitamente la soluzione di (P).

. . . .

(a) La funzione $f(x, y) = |y| - e^x$ è continua in $\mathbf{R}^2$ e per ogni $(x, y_1)\,, (x, y_2) \in \mathbf{R}^2$ si ha

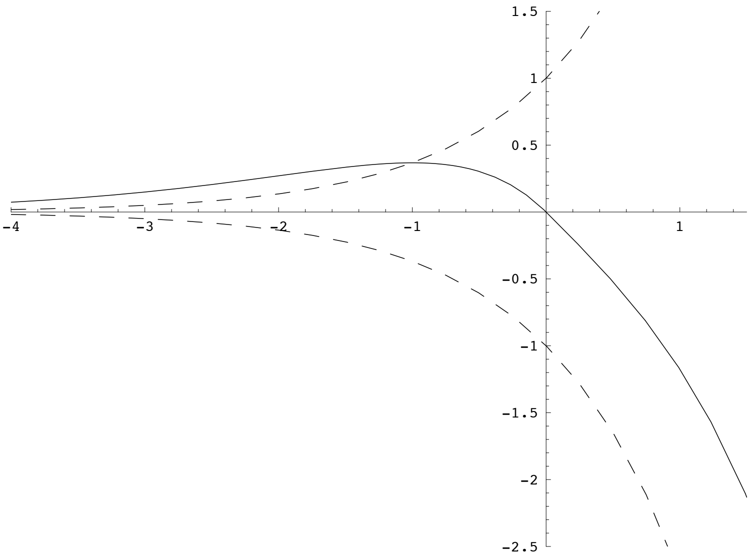
$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \big||y_1| - e^x - |y_2| + e^x\big| = \big||y_1| - |y_2|\big| \le \big|y_1 - y_2\big|\,,$$

cioè f è globalmente lipschitziana in $\mathbf{R}^2$ rispetto alla seconda variabile y, uniformemente rispetto alla variabile x. Pertanto, per il teorema di esistenza globale le soluzioni di $y' = |y| - e^x$ sono definite in tutto $\mathbf{R}$.
(b) Grazie al punto precedente, la soluzione di (P) è definita in tutto $\mathbf{R}$.
Per tracciare un grafico approssimativo, è utile studiare la monotonia delle soluzioni. Infatti, le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = |y| - e^x$ sono strettamente crescenti per $|y| > e^x$, ovvero per $y < -e^x$ o $y > e^x$, mentre sono strettamente decrescenti per $|y| < e^x$, cioè $-e^x < y < e^x$.
Dallo studio della monotonia, segue che per $x > 0$ necessariamente la soluzione $y(x)$ è decrescente, e quindi per $x > 0$ si ha $y(x) < 0$.
Inoltre, $y(x)$ si mantiene sempre al di sopra della funzione $-e^x$. Infatti, se esistesse un punto $x_0 > 0$ tale che $y(x_0) = -e^{x_0}$, essendo $y'(x_0) = -y(x_0) - e^{x_0} = 0$ e $y(x) > -e^x$ per $x < x_0$, si avrebbe un assurdo:

$$0 = y'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} \le \lim_{x \to x_0^-} \frac{-e^x - (-e^{x_0})}{x - x_0} = -\lim_{x \to x_0^-} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = -e^{x_0}\,.$$

Ancora grazie alla monotonia si ha $y(x) > 0$ per ogni $x < 0$. In particolare, $y(x)$ incontra in un punto la funzione e^x e per $x \to -\infty$ si mantiene sempre al di sopra della funzione e^x (con ragionamento analogo a quanto visto in precedenza).
Infine, utilizzando il teorema dell'asintoto si può provare che $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} y(x) = 0$.

Grazie alle considerazioni fatte, si può tracciare il seguente grafico approssimativo della soluzione:



(c) Per determinare esplicitamente la soluzione, occorre risolvere i problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -y - e^x & x \geq 0 \\ y(0) = 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = y - e^x & x \leq 0 \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

In conclusione, la soluzione di (P) è data da

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x} - e^x}{2} & \text{se } x \geq 0 \\ -xe^x & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

---

3 - Determinare, se esistono, il minimo assoluto e il massimo assoluto della funzione

$$f(x,y,z) = x^2 - 4x - (y+1)^2 + z^2$$

nell'insieme $C = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 \leq 4\}$.

....

La funzione f è continua in $\mathbf{R}^3$, e di conseguenza per il teorema di Weierstrass f ammette minimo assoluto e massimo assoluto nell'insieme compatto C.
Si osservi che $f \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$, e di conseguenza si può applicare il teorema di Fermat: i punti di estremo interni a C sono necessariamente punti critici.
Per ogni $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ il gradiente di f è dato da

$$\nabla f(x,y,z) = \big(2(x-2), -2(y+1), 2z\big)\,,$$

e si annulla nel punto $P_1 = (2,-1,0)$, che è interno a C.
Per determinare gli estremi di f sulla frontiera

$$\partial C = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4\}$$

di C, si può utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. I punti di ∂C sono tutti regolari. La funzione lagrangiana è data da

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = x^2 - 4x - (y+1)^2 + z^2 - \lambda((x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 - 4)\,,$$

e di conseguenza

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = 2(1-\lambda)(x-2) \\ \mathcal{L}_y = -2(1+\lambda)(y+1) \\ \mathcal{L}_z = 2(1-\lambda)z + 2\lambda \\ \mathcal{L}_\lambda = -((x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 - 4)\,. \end{cases}$$

Per risolvere il sistema $\nabla\mathcal{L}(x,y,z,\lambda)=\mathbf{0}$ occorre risolvere i seguenti sistemi:

$$\begin{cases}\lambda=1\\(1+\lambda)(y+1)=0\\(1-\lambda)z+\lambda=0\\(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4\end{cases}\qquad\begin{cases}x=2\\\lambda=-1\\(1-\lambda)z+\lambda=0\\(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4\end{cases}\qquad\begin{cases}x=2\\y=-1\\(1-\lambda)z+\lambda=0\\(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4\,.\end{cases}$$

Il primo sistema risulta impossibile (basta porre $\lambda=1$ nella terza equazione). Il secondo sistema ha soluzioni $\big(2,\frac{\sqrt{15}}{2}-1,\frac{1}{2},-1\big)$ e $\big(2,-\frac{\sqrt{15}}{2}-1,\frac{1}{2},-1\big)$, mentre il terzo sistema ha soluzioni $\big(2,-1,3,\frac{3}{2}\big)$ e $\big(2,-1,-1,\frac{1}{2}\big)$. Pertanto

$$P_2=\Big(2,\frac{\sqrt{15}}{2}-1,\frac{1}{2}\Big)\,,\quad P_3=\Big(2,-\frac{\sqrt{15}}{2}-1,\frac{1}{2}\Big)\,,\quad P_4=(2,-1,3)\,,\quad P_5=(2,-1,-1)$$

sono i punti critici vincolati a ∂C.
In conclusione, per determinare il minimo assoluto e il massimo assoluto di f nell'insieme compatto C si devono confrontare i valori

$$f(P_1)=-4\,,\quad f(P_2)=f(P_3)=-\frac{15}{2}\,,\quad f(P_4)=5\,,\quad f(P_5)=-3\,,$$

e di conseguenza

$$\min_{(x,y,z)\in C}f(x,y,z)=f(P_2)=f(P_3)=-\frac{15}{2}\,,\quad \max_{(x,y,z)\in C}f(x,y,z)=f(P_4)=5\,.$$