1 - Data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^n}{n+1} x^{n+1},$$

determinarne raggio di convergenza, insieme di convergenza e somma all'interno dell'insieme di convergenza.

. . . .

Dallo sviluppo in serie di Taylor della funzione $\log(1+t)$

$$\log(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{n+1}}{n+1}, \quad |t| < 1,$$

segue che la serie assegnata ha raggio di convergenza $\dfrac{1}{\pi}$ e insieme di convergenza $\Big(-\dfrac{1}{\pi}, \dfrac{1}{\pi}\Big]$, in quanto la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

è convergente. Inoltre la somma è data da

$$\frac{1}{\pi}\log(1+\pi x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^n}{n+1} x^{n+1}, \quad x \in \Big(-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\Big).$$

Si può anche determinare il raggio di convergenza mediante il criterio del rapporto.

---

2 - (a) Verificare le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per l'equazione differenziale

$$y' = 3xy^2 - y. \tag{1}$$

(b) Determinare, se esistono, tutte le soluzioni globali di (1).
(c) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3xy^2 - y, \\ y(0) = \dfrac{1}{3}, \end{cases}$$

e il suo intervallo massimale di definizione.

. . . .

(a) La funzione $f(x,y) = 3xy^2 - y$ è continua in $\mathbf{R}^2$. Inoltre, per ogni $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ si ha

$$f_y(x,y) = 6xy - 1,$$

e quindi, essendo $f_y(x,y)$ continua, la funzione f è localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile y, uniformemente rispetto alla variabile x; ne segue che sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per l'equazione differenziale assegnata.
(b) L'equazione differenziale assegnata è di Bernoulli e ammette la soluzione identicamente nulla $y = 0$. Per il teorema di esistenza e unicità locale ogni altra soluzione $y(x)$ di (1) non si annullerà in alcun punto e sarà sempre positiva o sempre negativa. Pertanto, posto $z = \dfrac{1}{y}$, l'equazione assegnata si trasforma nella seguente equazione lineare in z

$$z' = z - 3x,$$

e il suo integrale generale è dato da

$$z(x) = Ce^x + 3(x+1), \qquad C \in \mathbf{R}.$$

Tenendo conto di $y = \dfrac{1}{z}$, si ha

$$y(x) = \frac{1}{Ce^x + 3(x+1)}, \qquad C \in \mathbf{R}.$$

Le soluzioni di (1) sono globali se sono definite in tutto $\mathbf{R}$, cioè se

$$z(x) = Ce^x + 3(x+1) \neq 0, \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Si osservi ora che $\lim_{x\to-\infty} z(x) = -\infty$ e $z(0) = C + 3$, e quindi per $C \geq -3$ la funzione z non è sempre strettamente negativa, da cui segue che per $C \geq -3$ le soluzioni di (1) non sono globali.
Se invece $C < -3$, per la disuguaglianza notevole $e^x \geq 1 + x$, $x \in \mathbf{R}$, si ha

$$z(x) < -3\big(e^x - x - 1\big) < 0 \qquad \forall x \in \mathbf{R}\,,$$

e di conseguenza per ogni $C < -3$ le soluzioni di (1) sono definite in $\mathbf{R}$, e quindi sono globali.
(c) Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 1/3$, si ha $C = 0$. Pertanto, la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{1}{3(x+1)}$$

e il suo intervallo massimale di definizione è $(-1, \infty)$, in quanto $0 \in (-1, \infty)$.

---

3 - Determinare il minimo assoluto e il massimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = y^3 - x^3 + 1$$

nell'insieme $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

. . . .

La funzione f è continua in $\mathbf{R}^2$, e di conseguenza per il teorema di Weierstrass f ammette minimo assoluto e massimo assoluto nell'insieme compatto C.
Si osservi che $f \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$, e di conseguenza si può applicare il teorema di Fermat: i punti di estremo interni a C sono necessariamente punti critici.
Per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ il gradiente di f è dato da

$$\nabla f(x, y) = \big(-3x^2, 3y^2\big)\,,$$

e si annulla nel punto $P_1 = (0, 0)$, che è interno a C.
Per determinare gli estremi di f sulla frontiera $\partial C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ di C, si può utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. I punti di ∂C sono tutti regolari e la funzione lagrangiana è data da

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = y^3 - x^3 + 1 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)\,,$$

e di conseguenza

$$\nabla\mathcal{L}(x, y, \lambda) = \big(-x(3x + 2\lambda), y(3y - 2\lambda), -(x^2 + y^2 - 1)\big)\,.$$

Per risolvere $\nabla\mathcal{L}(x, y, \lambda) = \mathbf{0}$ occorre risolvere i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ 3y - 2\lambda = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 2\lambda = 0 \\ y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 2\lambda = 0 \\ 3y - 2\lambda = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0\,. \end{cases}$$

Il primo sistema è impossibile, il secondo ha soluzioni $(0, 1, 3/2)$ e $(0, -1, -3/2)$, il terzo ha soluzioni $(1, 0, -3/2)$ e $(-1, 0, 3/2)$ e infine il quarto ha soluzioni $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, -3/(2\sqrt{2}))$ e $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 3/(2\sqrt{2}))$. Pertanto $P_2 = (0, 1)$, $P_3 = (0, -1)$, $P_4 = (1, 0)$, $P_5 = (-1, 0)$, $P_6 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ e $P_7 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ sono i punti critici vincolati a ∂C.
In conclusione, per determinare il minimo assoluto e il massimo assoluto di f nell'insieme compatto C si devono confrontare i seguenti valori

$$f(P_1) = 1\,, \quad f(P_2) = 0\,, \quad f(P_3) = 2\,, \quad f(P_4) = 2\,, \quad f(P_5) = 0\,, \quad f(P_6) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \quad f(P_7) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

e di conseguenza

$$\min_{(x,y)\in C} f(x, y) = f(P_2) = f(P_5) = 0\,, \qquad \max_{(x,y)\in C} f(x, y) = f(P_3) = f(P_4) = 2\,.$$