1 - (a) Verificare che la funzione $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ è analitica.
(b) Scrivere l'integrale

$$\int_0^1 \frac{\cosh(3x^2) - 1}{x^4}\, dx$$

come somma di una serie.

. . . .

(a) La funzione $\cosh t$ è analitica, in quanto

$$\begin{aligned}\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^k}{k!}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}\,, \qquad t \in \mathbf{R}\,.\end{aligned}$$

(b) Per l'unicità dello sviluppo in serie di potenze si ha

$$\frac{\cosh(3x^2) - 1}{x^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{(2n)!} x^{4(n-1)}\,, \qquad x \in \mathbf{R}\,.$$

In conclusione, per il teorema di integrazione termine a termine si ottiene

$$\int_0^1 \frac{\cosh(3x^2) - 1}{x^4}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{(2n)!} \int_0^1 x^{4(n-1)}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{(2n)!(4n-3)}\,.$$

---

2 - (a) Verificare le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per l'equazione differenziale

$$y' = y - 4xy^3\,. \tag{1}$$

(b) Determinare, se esistono, tutte le soluzioni globali di (1).
(c) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y - 4xy^3, \\ y(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,, \end{cases}$$

e il suo intervallo massimale di definizione.

. . . .

(a) La funzione

$$f(x, y) = y - 4xy^3$$

è continua in $\mathbf{R}^2$. Inoltre, per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ si ha

$$f_y(x, y) = 1 - 12xy^2\,,$$

e quindi, essendo $f_y(x, y)$ continua, la funzione f è localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile y, uniformemente rispetto alla variabile x; ne segue che sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per l'equazione differenziale assegnata.
(b) L'equazione differenziale assegnata è di Bernoulli e ammette la soluzione identicamente nulla $y = 0$. Per il teorema di esistenza e unicità locale ogni altra soluzione $y(x)$ di (1) non si annullerà in alcun punto e sarà sempre positiva o sempre negativa. Pertanto, posto $z = \dfrac{1}{y^2}$, l'equazione assegnata si trasforma nella seguente equazione lineare in z

$$z' = -2z + 8x,$$

e il suo integrale generale è dato da

$$z(x) = Ce^{-2x} + 4x - 2\,, \qquad C \in \mathbf{R}\,.$$

Tenendo conto di $|y| = \dfrac{1}{\sqrt{z}}$, si ha

$$|y(x)| = \frac{1}{\sqrt{Ce^{-2x} + 4x - 2}}\,, \qquad C \in \mathbf{R}\,.$$

Le soluzioni di (1) sono globali se sono definite in tutto $\mathbf{R}$, cioè se

$$z(x) = Ce^{-2x} + 4x - 2 > 0\,, \qquad \forall x \in \mathbf{R}\,.$$

Si osservi ora che $\lim_{x\to+\infty} z(x) = +\infty$ e $z(0) = C - 2$, e quindi per $C \leq 2$ la funzione z non è sempre strettamente positiva, da cui segue che per $C \leq 2$ le soluzioni di (1) non sono globali.
Se invece $C > 2$, per la disuguaglianza notevole $e^t \geq 1 + t$, $t \in \mathbf{R}$, si ha

$$z(x) > 2\big(e^{-2x} + 2x - 1\big) \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbf{R}\,,$$

e di conseguenza per ogni $C > 2$ le soluzioni di (1) sono definite in $\mathbf{R}$, e quindi sono globali.
(c) Grazie alla condizione iniziale $y(1) = 1/\sqrt{2}$ si ha che la soluzione del problema di Cauchy è positiva e $C = 0$. Pertanto, la soluzione è data da

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{4x-2}}$$

e il suo intervallo massimale di definizione è $(1/2, \infty)$, perché $4x - 2 > 0$ per $x > 1/2$.

---

3 - (a) Determinare gli eventuali estremi liberi della funzione

$$f(x, y, z) = (y - \sqrt{2})^2 + x^2 + 5z^2 - 3xz - 11\,.$$

(b) La funzione f ha il minimo assoluto?

. . . .

In primo luogo si osservi che $f \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$, e di conseguenza si può applicare il teorema di Fermat: i punti di estremo sono necessariamente punti critici.
Per ogni $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ il gradiente di f è dato da

$$\nabla f(x, y, z) = \big(2x - 3z, 2(y - \sqrt{2}), 10z - 3x\big)\,,$$

e si annulla nel punto $P := (0, \sqrt{2}, 0)$.
Per classificare il punto critico P si possono utilizzare le condizioni sufficienti basate sul segno della forma quadratica associata alla matrice hessiana.
La matrice hessiana di f calcolata nel generico punto $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ è data da

$$D^2 f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Si osservi che

$$\big|D^2 f(x, y, z) - \lambda I\big| = (2 - \lambda)[(2 - \lambda)(10 - \lambda) - 9] = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 12\lambda + 11)$$

e di conseguenza $\big|D^2 f(x, y, z) - \lambda I\big| = 0$ se e solo se $\lambda = 2\,, 11\,, 1$. Per ogni $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ gli autovalori della matrice $D^2 f(x, y, z)$ sono positivi, e quindi $D^2 f(x, y, z)$ è definita positiva. Pertanto la funzione f è strettamente convessa in $\mathbf{R}^3$ e di conseguenza il punto critico P è punto di minimo assoluto per f in $\mathbf{R}^3$.
Si può anche stabilire che la matrice $D^2 f(x, y, z)$ è definita positiva valutando il segno dei minori principali di nord-ovest: infatti si ha

$$2 > 0\,, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0\,, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 22 > 0\,.$$

In conclusione, il valore

$$f(P) = -11$$

è il minimo assoluto per f.