1 - Determinare la serie di potenze avente per somma la funzione

$$f(x) = \frac{1 - e^{-\pi x}}{x}\,,$$

in un intervallo centrato in 0.
Calcolare $f^{(30)}(0)$ e $f^{(31)}(0)$. Si può dare una formula generale per $f^{(n)}(0)$, $n \in \mathbf{N}$ qualunque?

. . . .

Dallo sviluppo in serie di Taylor della funzione e^t

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\,, \qquad t \in \mathbf{R}\,,$$

segue (per $t = -\pi x$)

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1 - e^{-\pi x}}{x} &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\pi^k}{k!} x^{k-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!} x^n\,, \qquad x \in \mathbf{R}\,. \end{aligned}$$

Per l'unicità dello sviluppo in serie di potenze e tenendo conto della definizione di serie di Taylor, si ha

$$f^{(30)}(0) = \frac{\pi^{31}}{31}\,, \qquad f^{(31)}(0) = -\frac{\pi^{32}}{32}\,.$$

In generale, per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n \frac{\pi^{n+1}}{n+1}\,.$$

---

2 - Determinare una soluzione $y(x)$ in serie di potenze dell'equazione differenziale

$$y'' - 2xy' + 4y = 0$$

tale che $y'(0) = 0$.

. . . .

Si cerca la soluzione come serie di potenze

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\,.$$

Le derivate di $y(x)$ sono:

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}\,, \qquad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}\,,$$

e di conseguenza $y(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale assegnata se vale l'identità

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k + 4 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0\,.$$

Si osservi che

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k\,;$$

di conseguenza si possono accorpare due serie e si ha

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} - 2 \sum_{k=0}^{\infty} (k-2) a_k x^k = 0\,.$$

Cambiando la variabile nella prima serie, ponendo $n = k - 2$, si ottiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - 2(n-2) a_n] x^n = 0\,,$$

da cui segue

$$a_{n+2} = \frac{2(n-2)}{(n+2)(n+1)} a_n \qquad \forall n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\,. \tag{1}$$

La condizione $y'(0) = 0$ implica $a_1 = 0$, e quindi da (1) segue che tutti i coefficienti di indice dispari sono nulli. Inoltre, sempre da (1) segue $a_2 = -2a_0$ e $a_4 = 0$. Pertanto $a_{2k} = 0$ per ogni $k \geq 2$.
In conclusione, si ha

$$y(x) = a_0(1 - 2x^2)\,.$$

---

3 - Determinare il minimo assoluto e il massimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = 2x^3 - 3y^3$$

nell'insieme $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2x^2 + 3y^2 \leq 1\}$.

. . . .

La funzione f è continua in $\mathbf{R}^2$, e di conseguenza per il teorema di Weierstrass f ammette minimo assoluto e massimo assoluto nell'insieme compatto C.
Si osservi che $f \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$, e di conseguenza si può applicare il teorema di Fermat: i punti di estremo interni a C sono necessariamente punti critici.
Per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ il gradiente di f è dato da

$$\nabla f(x, y) = \big(6x^2, -9y^2\big)\,,$$

e si annulla nel punto $P_1 = (0, 0)$, che è interno a C.
Per determinare gli estremi di f sulla frontiera $\partial C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2x^2 + 3y^2 = 1\}$ di C, si può utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. I punti di ∂C sono tutti regolari e la funzione lagrangiana è data da

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 2x^3 - 3y^3 - \lambda(2x^2 + 3y^2 - 1)\,,$$

e di conseguenza

$$\nabla\mathcal{L}(x, y, \lambda) = \big(2x(3x - 2\lambda), -3y(3y + 2\lambda), -(2x^2 + 3y^2 - 1)\big)\,.$$

Per risolvere $\nabla\mathcal{L}(x, y, \lambda) = \mathbf{0}$ occorre risolvere i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 2x^2 + 3y^2 - 1 = 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ 3y + 2\lambda = 0 \\ 2x^2 + 3y^2 - 1 = 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 2\lambda = 0 \\ y = 0 \\ 2x^2 + 3y^2 - 1 = 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 2\lambda = 0 \\ 3y + 2\lambda = 0 \\ 2x^2 + 3y^2 - 1 = 0\,. \end{cases}$$

Il primo sistema è impossibile, il secondo ha soluzioni $(0, 1/\sqrt{3}, -\sqrt{3}/2)$ e $(0, -1/\sqrt{3}, \sqrt{3}/2)$, il terzo ha soluzioni $(1/\sqrt{2}, 0, 3/(2\sqrt{2}))$ e $(-1/\sqrt{2}, 0, -3/(2\sqrt{2}))$ e infine il quarto ha soluzioni $(1/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}, 3/(2\sqrt{5}))$ e $(-1/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}, -3/(2\sqrt{5}))$. Pertanto $P_2 = (0, 1/\sqrt{3})$, $P_3 = (0, -1/\sqrt{3})$, $P_4 = (1/\sqrt{2}, 0)$, $P_5 = (-1/\sqrt{2}, 0)$, $P_6 = (1/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$ e $P_7 = (-1/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ sono i punti critici vincolati a ∂C.
In conclusione, per determinare il minimo assoluto e il massimo assoluto di f nell'insieme compatto C si devono confrontare i seguenti valori

$$f(P_1) = 0\,, \quad f(P_2) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\,, \quad f(P_3) = \frac{1}{\sqrt{3}}\,, \quad f(P_4) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \quad f(P_5) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,, \quad f(P_6) = \frac{1}{\sqrt{5}}\,, \quad f(P_7) = -\frac{1}{\sqrt{5}}\,,$$

e di conseguenza

$$\min_{(x,y)\in C} f(x, y) = f(P_5) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,, \qquad \max_{(x,y)\in C} f(x, y) = f(P_4) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$