1 - (a) Verificare le ipotesi del teorema di esistenza globale per l'equazione differenziale $y' = e^{-x} - |y|$.
(b) Tracciare un grafico approssimativo della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{-x} - |y| \\ y(0) = 1 . \end{cases} \qquad (P)$$

(c) Determinare esplicitamente la soluzione $y(x)$ di (P). (Suggerimento: risulta utile verificare che $y(-1) = 0$)

. . . .

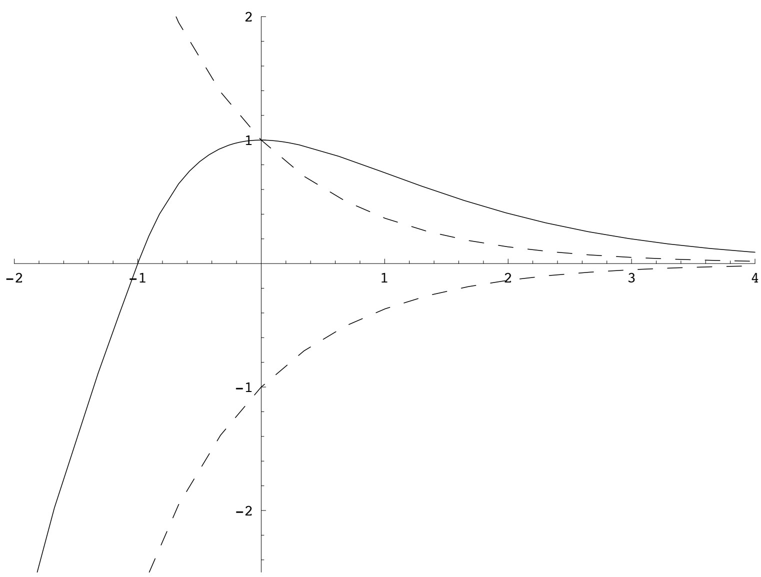
(a) La funzione $f(x, y) = e^{-x} - |y|$ è continua in $\mathbf{R}^2$ e per ogni $(x, y_1), (x, y_2) \in \mathbf{R}^2$ si ha

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \big|e^{-x} - |y_1| - e^{-x} + |y_2|\big| = \big||y_2| - |y_1|\big| \le \big|y_1 - y_2\big| ,$$

cioè f è globalmente lipschitziana in $\mathbf{R}^2$ rispetto alla seconda variabile y, uniformemente rispetto alla variabile x. Pertanto, per il teorema di esistenza globale le soluzioni di $y' = e^{-x} - |y|$ sono definite in tutto $\mathbf{R}$.
(b) Grazie al punto precedente, la soluzione di (P) è definita in tutto $\mathbf{R}$ e si noti che $y'(0) = 0$.
Per tracciare un grafico approssimativo, è utile studiare la monotonia delle soluzioni. Infatti, le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = e^{-x} - |y|$ sono strettamente crescenti per $|y| < e^{-x}$, ovvero per $-e^{-x} < y < e^{-x}$, mentre sono strettamente decrescenti per $|y| > e^{-x}$, cioè $y > e^{-x}$ oppure $y < -e^{-x}$.
Dallo studio della monotonia, segue che per $x > 0$ necessariamente la soluzione $y(x)$ è decrescente, e quindi per $x > 0$ si ha $y(x) > 0$.
Inoltre, $y(x)$ si mantiene sempre al di sopra della funzione e^{-x}. Infatti, se esistesse un punto $x_0 > 0$ tale che $y(x_0) = e^{-x_0}$, essendo $y'(x_0) = e^{-x_0} - y(x_0) = 0$ e $y(x) > e^{-x}$ per $x < x_0$, si avrebbe un assurdo:

$$0 = y'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} \le \lim_{x \to x_0^-} \frac{e^{-x} - e^{-x_0}}{x - x_0} = -e^{-x_0} .$$

Inoltre, si verifica facilmente che la soluzione è concava in un intorno di 0 ($y(x) > 0$ in un intorno di 0 e quindi $y''(x) = -e^{-x} - y'(x)$ in un intorno di 0, da cui $y''(0) = -1$). Pertanto, grazie anche alla monotonia, si ha che $y(x)$ è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$.
Si può provare che $\lim_{x \to -\infty} y(x) = -\infty$ (se fosse $\lim_{x \to -\infty} y(x) = l \in \mathbf{R}$, si avrebbe $\lim_{x \to -\infty} y'(x) = +\infty$ contro il teorema dell'asintoto) e analogamente $\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$.
Infine, $y(x)$ si deve annullare in un punto $\overline{x} < 0$ ($y(\overline{x}) = 0$) e si mantiene sempre al di sopra della funzione $-e^{-x}$ (con ragionamento analogo a quanto visto in precedenza).
Grazie alle considerazioni fatte, si può tracciare il seguente grafico approssimativo della soluzione:



(c) Per determinare esplicitamente la soluzione, occorre risolvere dapprima il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{-x} - y \qquad x \ge \overline{x} \\ y(0) = 1 , \end{cases}$$

e si ottiene $y(x) = e^{-x}(x + 1)$, da cui segue che $\overline{x} = -1$.

A questo punto, occorre risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{-x} + y & x \leq -1 \\ y(-1) = 0\,, \end{cases}$$

e si ottiene $y(x) = \dfrac{1}{2}\big(e^{x+2} - e^{-x}\big)$.
In conclusione, la soluzione di (P) è data da

$$y(x) = \begin{cases} e^{-x}(x+1) & \text{se } \ x \geq -1 \\ \dfrac{1}{2}\big(e^{x+2} - e^{-x}\big) & \text{se } x < -1\,. \end{cases}$$

---

2 - Dimostrare che la funzione $\quad f(x) = \dfrac{4x - \operatorname{sen}(4x)}{x^3} \quad$ è analitica in un intervallo centrato in 0. Calcolare le derivate $f^{(58)}(0)$ e $f^{(59)}(0)$.

. . . .

La funzione $\operatorname{sen} t$ è analitica,

$$\operatorname{sen} t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}\,, \quad t \in \mathbf{R}\,,$$

e quindi per l'unicità dello sviluppo in serie di potenze, si ha

$$\operatorname{sen}(4x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} = 4x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{4n+2}}{(2n+1)!} x^{2n+1}\,, \quad x \in \mathbf{R}$$

e

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{4n+2}}{(2n+1)!} x^{2n-2}\,, \quad x \in \mathbf{R}\,.$$

Inoltre, $f^{(58)}(0) = -\dfrac{2^{122}}{59 \cdot 60 \cdot 61} = -\dfrac{2^{120}}{15 \cdot 59 \cdot 61}$ $(2n - 2 = 58$ per $n = 30)$ e $f^{(59)}(0) = 0$ (f è una funzione pari).

---

3 - Determinare, se esistono, il minimo assoluto e il massimo assoluto della funzione $\quad f(x,y,z) = x(y+1) - z^2$ nell'insieme $C = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\}$.

. . . .

La funzione f è continua in $\mathbf{R}^3$, e di conseguenza per il teorema di Weierstrass f ammette minimo assoluto e massimo assoluto nell'insieme compatto C.
Si osservi che $f \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$, e di conseguenza si può applicare il teorema di Fermat: i punti di estremo di f interni a C sono necessariamente punti critici.
Per ogni $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ il gradiente di f è dato da

$$\nabla f(x,y,z) = \big(y+1, x, -2z\big)\,,$$

e si annulla nel punto $P_1 = (0,-1,0)$, che è interno a C.
Per determinare gli estremi di f sulla frontiera

$$\partial C = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 3\}$$

di C, si può utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. I punti di ∂C sono tutti regolari. La funzione lagrangiana è data da

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = x(y+1) - z^2 - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 3)\,,$$

e di conseguenza

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = y + 1 - 2\lambda x \\ \mathcal{L}_y = x - 2\lambda y \\ \mathcal{L}_z = -2(1+\lambda)z \\ \mathcal{L}_\lambda = -(x^2 + y^2 + z^2 - 3)\,. \end{cases}$$

Per risolvere il sistema $\nabla \mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = \mathbf{0}$ occorre risolvere i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} \lambda = -1 \\ y + 1 - 2\lambda x = 0 \\ x - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = 0 \\ y + 1 - 2\lambda x = 0 \\ x - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3\,. \end{cases}$$

Il primo sistema ha soluzioni $\big(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{\sqrt{22}}{3},-1\big)$ e $\big(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{\sqrt{22}}{3},-1\big)$, e di conseguenza $P_2=\big(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{\sqrt{22}}{3}\big)$ e $P_3=\big(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{\sqrt{22}}{3}\big)$ sono punti critici di f vincolati a ∂C.
Per risolvere il secondo sistema, si osservi che se fosse $x=0$ si avrebbe $y=-1$, ma il punto $(0,-1,0)$ non verifica la quarta equazione, e quindi necessariamente $x\neq 0$.
Pertanto, essendo $x\neq 0$, si può ricavare λ dalla seconda equazione e sostituirlo nella terza, ottenendo

$$\begin{cases} z=0 \\ \lambda=\dfrac{y+1}{2x} \\ x^2-y(y+1)=0 \\ x^2+y^2+z^2=3\,. \end{cases}$$

Sostituendo $z=0$ e $x^2=y(y+1)$ nella quarta equazione, si ottiene $2y^2+y-3=0$, che ha soluzioni $y=1$ e $y=-\frac{3}{2}$.
Se $y=1$ si ha $x=\pm\sqrt{2}$, mentre per $y=-\frac{3}{2}$ si ha $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; di conseguenza

$$P_4=\big(\sqrt{2},1,0\big)\,,\quad P_5=\big(-\sqrt{2},1,0\big)\,,\quad P_6=\big(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},0\big)\,,\quad P_7=\big(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},0\big)$$

sono punti critici di f vincolati a ∂C.
In conclusione, per determinare il minimo assoluto e il massimo assoluto di f nell'insieme compatto C si devono confrontare i valori

$$f(P_1)=0\,,\quad f(P_2)=f(P_3)=-\frac{10}{3}\,,\quad f(P_4)=2\sqrt{2}\,,\quad f(P_5)=-2\sqrt{2}\,,\quad f(P_6)=-\frac{\sqrt{3}}{4}\,,\quad f(P_7)=\frac{\sqrt{3}}{4}\,,$$

e di conseguenza, essendo $\frac{10}{3}>3$, $2\sqrt{2}<3$ e $\frac{\sqrt{3}}{4}<1$, si ha

$$\min_{(x,y,z)\in C} f(x,y,z)=f(P_2)=-\frac{10}{3}\,,\qquad \max_{(x,y,z)\in C} f(x,y,z)=f(P_4)=2\sqrt{2}\,.$$

Si osservi che per determinare gli estremi di f sulla frontiera ∂C di C, si può anche ricavare z^2 dall'equazione che definisce il vincolo, cioè $z^2=3-x^2-y^2$ e sostituirlo nell'espressione di f: basterà allora determinare il minimo assoluto e il massimo assoluto della funzione di due variabili

$$g(x,y):=x(y+1)-3+x^2+y^2$$

nel compatto $K=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x^2+y^2\leq 3\}$.