1 - (a) Verificare che la funzione $\operatorname{arctg} t$ è analitica in un intervallo centrato in 0.
(b) Data la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \, 9^n}{2n+1} x^{2n+1} \,,$$

determinarne raggio di convergenza, insieme di convergenza e somma all'interno dell'insieme di convergenza.

. . . .

Dallo sviluppo in serie di Taylor della funzione $\operatorname{arctg} t$

$$\operatorname{arctg} t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1} \,, \qquad |t| < 1 \,,$$

ponendo $t = 3x$, segue che la serie assegnata ha raggio di convergenza $\frac{1}{3}$ e insieme di convergenza $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$, in quanto la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

è convergente per il criterio di Leibniz. Inoltre, tenendo conto che la serie parte da $n = 1$, la somma è data da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \, 9^n}{2n+1} x^{2n+1} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(3x) - x \,, \qquad x \in \Big(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\Big) \,.$$

Si può anche determinare il raggio di convergenza applicando il criterio del rapporto alla serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \, 9^n}{2n+1} y^n$$

con $y = x^2$.

---

2 - (a) Verificare le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per l'equazione differenziale

$$y' = \frac{1}{2x} y - y^3 \log x \,, \qquad x > 0 \,. \tag{1}$$

(b) Determinare, se esistono, le soluzioni di (1) definite in $(0, \infty)$.
(c) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{2x} y - y^3 \log x \,, & x > 0, \\ y(e) = -\sqrt{\dfrac{2}{e}} \,, \end{cases}$$

e il suo intervallo massimale di definizione.

. . . .

(a) La funzione $f(x,y) = \frac{1}{2x} y - y^3 \log x$ è continua in $(0, \infty) \times \mathbf{R}$. Inoltre, per ogni $(x, y) \in (0, \infty) \times \mathbf{R}$ si ha

$$f_y(x,y) = \frac{1}{2x} - 3y^2 \log x \,,$$

e quindi, essendo $f_y(x, y)$ continua, la funzione f è localmente lipschitziana in $(0, \infty) \times \mathbf{R}$ rispetto alla seconda variabile y, uniformemente rispetto alla variabile x; ne segue che sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per l'equazione differenziale assegnata.
(b) L'equazione differenziale assegnata è di Bernoulli e ammette la soluzione identicamente nulla $y = 0$. Per il teorema di esistenza e unicità locale ogni altra soluzione $y(x)$ di (1) non si annullerà in alcun punto e sarà sempre positiva o sempre negativa. Pertanto, posto $z = y^{-2}$, l'equazione assegnata si trasforma nella seguente equazione lineare in z

$$z' = -\frac{1}{x} z + 2 \log x, \qquad x > 0,$$

e il suo integrale generale è dato da

$$z(x) = \frac{1}{x} \Big(C + x^2 \log x - \frac{x^2}{2} \Big) \,, \qquad x > 0, \; C \in \mathbf{R} \,.$$

Tenendo conto di $|y| = z^{-1/2}$, si ha

$$|y(x)| = \frac{x^{1/2}}{\left(C + x^2 \log x - \frac{x^2}{2}\right)^{1/2}}, \qquad C \in \mathbf{R}.$$

Pertanto, le soluzioni di (1) sono globali, cioè definite in $(0, \infty)$, se la funzione

$$g(x) = C + x^2 \log x - \frac{x^2}{2} > 0, \qquad \forall x > 0.$$

Si osservi ora che $\lim_{x\to 0^+} g(x) = C$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, e quindi per $C < 0$ la funzione g non è sempre positiva, da cui segue che per $C < 0$ le soluzioni di (1) non sono globali.
Nel caso $C \geq 0$ occorre un'ulteriore analisi. Infatti, si noti che

$$g'(x) = 2x \log x + x - x = 2x \log x > 0 \qquad \forall x > 1,$$

e quindi g è strettamente crescente in $(1, \infty)$ ed è strettamente decrescente in $(0, 1)$; di conseguenza $x = 1$ è punto di minimo assoluto per g e $\min_{x>0} g(x) = g(1) = C - \frac{1}{2}$. Pertanto, se $C > \frac{1}{2}$ si ha

$$g(x) \geq g(1) = C - \frac{1}{2} > 0 \qquad \forall x > 0,$$

mentre per $C = \frac{1}{2}$ si ha $g(1) = 0$ e per $C < \frac{1}{2}$ $g(x)$ ha dei valori negativi.
In conclusione, per ogni $C > \frac{1}{2}$ le soluzioni di (1) sono definite in tutto l'intervallo $(0, \infty)$.
Si osservi che si può giungere alla stessa conclusione applicando la disuguaglianza notevole $e^t \geq 1 + t$, per ogni $t \in \mathbf{R}$.
Infatti, senza fare la derivata di g, si noti che $g(1) = C - \frac{1}{2}$, e quindi si escludono i valori $C \leq \frac{1}{2}$. Invece se $C > \frac{1}{2}$, per la disuguaglianza notevole $e^t \geq 1 + t$ con $t = -2 \log x$ si ha

$$g(x) = x^2\left(Ce^{-2\log x} + \log x - \frac{1}{2}\right) > \frac{x^2}{2}\left(e^{-2\log x} + 2\log x - 1\right) \geq 0, \qquad \forall x > 0.$$

(c) La soluzione è

$$y(x) = -\frac{1}{\sqrt{x \log x - \frac{x}{2}}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x(2\log x - 1)}}$$

e il suo intervallo massimale di definizione è $(\sqrt{e}, +\infty)$.

---

3 - Determinare, se esistono, il minimo assoluto e il massimo assoluto della funzione $f(x, y, z) = \log(3+z^2) - (y-1)^2$ nell'insieme $C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + (y-1)^2 + z^2 \leq 25\}$.

. . . .

La funzione f è continua in $\mathbf{R}^3$, e di conseguenza per il teorema di Weierstrass f ammette minimo assoluto e massimo assoluto nell'insieme compatto C.
Si osservi che $f \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$, e di conseguenza si può applicare il teorema di Fermat: i punti di estremo di f interni a C sono necessariamente punti critici.
Per ogni $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ il gradiente di f è dato da

$$\nabla f(x, y, z) = \left(0, -2(y-1), \frac{2z}{3+z^2}\right),$$

e si annulla nei punti $(x, 1, 0)$, che sono interni a C se $|x| < 5$.
Per determinare gli estremi di f sulla frontiera

$$\partial C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25\}$$

di C, si può utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. I punti di ∂C sono tutti regolari. La funzione lagrangiana è data da

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = \log(3 + z^2) - (y-1)^2 - \lambda(x^2 + (y-1)^2 + z^2 - 25),$$

e di conseguenza

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = -2\lambda x \\ \mathcal{L}_y = -2(y-1)(1+\lambda) \\ \mathcal{L}_z = 2z\Big(\dfrac{1}{3+z^2} - \lambda\Big) \\ \mathcal{L}_\lambda = -(x^2 + (y-1)^2 + z^2 - 25)\,. \end{cases}$$

Per determinare le soluzioni del sistema $\nabla\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = \mathbf{0}$ occorre risolvere i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -1 \\ z\Big(\dfrac{1}{3+z^2} - \lambda\Big) = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ \dfrac{1}{3+z^2} - \lambda = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = -1 \\ z = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = -1 \\ \dfrac{1}{3+z^2} - \lambda = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25\,, \end{cases}$$

e di conseguenza i punti critici vincolati sono $(5,1,0)$, $(-5,1,0)$, $(0,1,5)$, $(0,1,-5)$, $(0,6,0)$ e $(0,-4,0)$.
In conclusione, per determinare il minimo assoluto e il massimo assoluto di f nell'insieme compatto C si devono confrontare i valori

$$f(x,1,0) = f(\pm 5,1,0) = \log 3\,, \quad f(0,1,\pm 5) = \log(28)\,, \quad f(0,6,0) = f(0,-4,0) = \log 3 - 25,$$

e di conseguenza, essendo $\log 3 - 25 < \log 3 < \log(28)$, si ha

$$\min_{(x,y,z)\in C} f(x,y,z) = f(0,6,0) = f(0,-4,0) = \log 3 - 25\,, \qquad \max_{(x,y,z)\in C} f(x,y,z) = f(0,1,\pm 5) = \log(28)\,.$$