1 - Dimostrare che la funzione $f(x) = \dfrac{\log(1-\pi x)}{x}$ è analitica in un intervallo centrato in 0.
Calcolare le derivate $f^{(17)}(0)$ e $f^{(20)}(0)$. Si può dare una formula generale per $f^{(n)}(0)$, $n \in \mathbf{N}$ qualunque?

. . . .

Dallo sviluppo in serie di Taylor della funzione $\log(1+t)$

$$\log(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} t^{n+1}\,, \quad |t| < 1\,,$$

per $t = -\pi x$ segue

$$f(x) = \frac{\log(1-\pi x)}{x} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{n+1}}{n+1} x^n\,, \qquad |x| < \frac{1}{\pi}\,.$$

Per l'unicità dello sviluppo in serie di potenze e tenendo conto della definizione di serie di Taylor, si ha

$$f^{(17)}(0) = -(17)!\frac{\pi^{18}}{18}\,, \qquad f^{(20)}(0) = -(20)!\frac{\pi^{21}}{21}\,.$$

In generale, per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$f^{(n)}(0) = -n!\frac{\pi^{n+1}}{n+1}\,.$$

---

2 - (a) Verificare le ipotesi del teorema di esistenza globale per l'equazione differenziale $y' = |y| - 2e^{-x}$.
(b) Tracciare un grafico approssimativo della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = |y| - 2e^{-x} \\ y(0) = 2\,. \end{cases} \tag{P}$$

(c) Determinare esplicitamente la soluzione $y(x)$ di (P).

. . . .

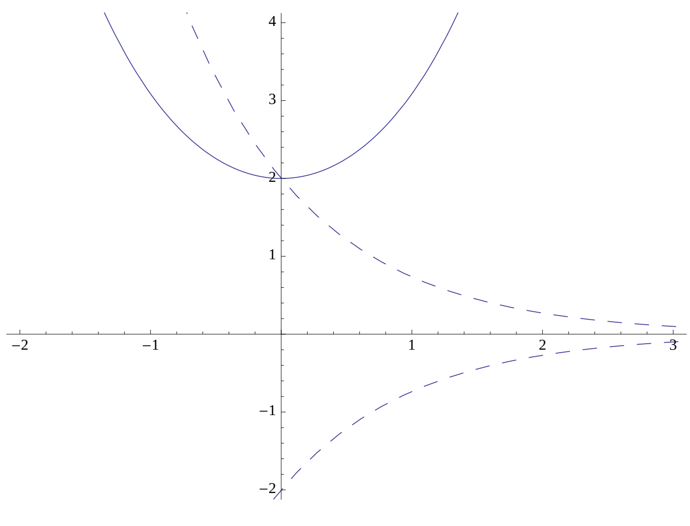
(a) La funzione $f(x,y) = |y| - 2e^{-x}$ è continua in $\mathbf{R}^2$ e per ogni $(x,y_1)\,,(x,y_2) \in \mathbf{R}^2$ si ha

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \big||y_1| - 2e^{-x} - |y_2| + 2e^{-x}\big| = \big||y_1| - |y_2|\big| \le \big|y_1 - y_2\big|\,,$$

cioè f è globalmente lipschitziana in $\mathbf{R}^2$ rispetto alla seconda variabile y, uniformemente rispetto alla variabile x. Pertanto, per il teorema di esistenza globale le soluzioni di $y' = |y| - 2e^{-x}$ sono definite in tutto $\mathbf{R}$.
(b) Grazie al punto precedente, la soluzione di (P) è definita in tutto $\mathbf{R}$ e si noti che $y'(0) = 0$.
Per tracciare un grafico approssimativo, è utile studiare la monotonia delle soluzioni. Infatti, le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = |y| - 2e^{-x}$ sono strettamente crescenti per $|y| > 2e^{-x}$, ovvero per $y > 2e^{-x}$ oppure $y < -2e^{-x}$, mentre sono strettamente decrescenti per $|y| < 2e^{-x}$, cioè $-2e^{-x} < y < 2e^{-x}$.
Dallo studio della monotonia, segue che per $x > 0$ necessariamente la soluzione $y(x)$ è crescente, e quindi per $x > 0$ si ha $y(x) > 0$.
Inoltre, $y(x)$ si mantiene sempre al di sotto della funzione $2e^{-x}$ in $(-\infty, 0)$. Infatti, se esistesse un punto $x_0 < 0$ tale che $y(x_0) = 2e^{-x_0}$, essendo $y'(x_0) = y(x_0) - 2e^{-x_0} = 0$ e $y(x) < 2e^{-x}$ per $x_0 < x < 0$, si avrebbe un assurdo:

$$0 = y'(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} \le \lim_{x\to x_0^+} \frac{2e^{-x} - 2e^{-x_0}}{x - x_0} = -2e^{-x_0}\,.$$

Pertanto grazie alla monotonia si ha che $y(x)$ è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$ e di conseguenza è sempre positiva.
Infine, utilizzando il teorema dell'asintoto si può provare che $\lim_{x\to-\infty} y(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$.
Grazie alle considerazioni fatte, si può tracciare il seguente grafico approssimativo della soluzione.



(c) Per determinare esplicitamente la soluzione, basta osservare che tale soluzione è sempre positiva, e quindi risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y - 2e^{-x} \\ \\ y(0) = 2\,. \end{cases}$$

In conclusione, la soluzione di (P) è $y(x) = e^x + e^{-x} = 2\cosh x$.

---

3 - Determinare, se esistono, il minimo assoluto e il massimo assoluto della funzione $f(x,y,z) = (x-3)^2 - e^{y^2-4}$ nell'insieme $C = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : (x-3)^2 + y^2 + z^2 \leq 7\}$.

. . . .

La funzione f è continua in $\mathbf{R}^3$, e di conseguenza per il teorema di Weierstrass f ammette minimo assoluto e massimo assoluto nell'insieme compatto C.
Si osservi che $f \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$, e di conseguenza si può applicare il teorema di Fermat: i punti di estremo di f interni a C sono necessariamente punti critici.
Per ogni $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ il gradiente di f è dato da

$$\nabla f(x,y,z) = \Big(2(x-3), -2ye^{y^2-4}, 0\Big)\,,$$

e si annulla nei punti $(3,0,z)$, che sono interni a C se $|z| < \sqrt{7}$.
Per determinare gli estremi di f sulla frontiera

$$\partial C = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : (x-3)^2 + y^2 + z^2 = 7\}$$

di C, si può utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. I punti di ∂C sono tutti regolari. La funzione lagrangiana è data da

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = (x-3)^2 - e^{y^2-4} - \lambda((x-3)^2 + y^2 + z^2 - 7)\,,$$

e di conseguenza

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = 2(x-3)(1-\lambda) \\ \mathcal{L}_y = -2y\big(e^{y^2-4} + \lambda\big) \\ \mathcal{L}_z = -2\lambda z \\ \mathcal{L}_\lambda = -((x-3)^2 + y^2 + z^2 - 7)\,. \end{cases}$$

Per determinare le soluzioni del sistema $\nabla\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = \mathbf{0}$ occorre risolvere i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y\big(e^{y^2-4} + \lambda\big) = 0 \\ \lambda = 0 \\ (x-3)^2 + y^2 + z^2 = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ (x-3)^2 + y^2 + z^2 = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 \\ e^{y^2-4} + \lambda = 0 \\ z = 0 \\ (x-3)^2 + y^2 + z^2 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ y\big(e^{y^2-4} + \lambda\big) = 0 \\ \lambda = 0 \\ (x-3)^2 + y^2 + z^2 = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ (x-3)^2 + y^2 + z^2 = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = 1 \\ e^{y^2-4} + \lambda = 0 \\ z = 0 \\ (x-3)^2 + y^2 + z^2 = 7\,, \end{cases}$$

e di conseguenza i punti critici vincolati sono $(3,0,\sqrt{7})$, $(3,0,-\sqrt{7})$, $(3,\sqrt{7},0)$, $(3,-\sqrt{7},0)$, $(3+\sqrt{7},0,0)$ e $(3-\sqrt{7},0,0)$.
In conclusione, per determinare il minimo assoluto e il massimo assoluto di f nell'insieme compatto C si devono confrontare i valori

$$f(3,0,z) = f(3,0,\pm\sqrt{7}) = -e^{-4}\,, \quad f(3,\pm\sqrt{7},0) = -e^3\,, \quad f(3\pm\sqrt{7},0,0) = 7 - e^{-4},$$

e di conseguenza, essendo $e^3 > e^{-4}$ e $7 - e^{-4} > 0$, si ha

$$\min_{(x,y,z)\in C} f(x,y,z) = f(3,\pm\sqrt{7},0) = -e^3\,, \qquad \max_{(x,y,z)\in C} f(x,y,z) = f(3\pm\sqrt{7},0,0) = 7 - e^{-4}\,.$$