**1** - Determinare raggio di convergenza, insieme di convergenza e somma della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{7n}}{n!}(x+\pi)^n .$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Dallo sviluppo in serie di Taylor della funzione $e^t$

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}, \quad t \in \mathbf{R},$$

segue che la serie assegnata ha raggio di convergenza $+\infty$, insieme di convergenza $\mathbf{R}$ e la somma è data da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{7n}}{n!}(x+\pi)^n = e^{5^7(x+\pi)} - 1, \quad x \in \mathbf{R}.$$

---

**2** - Determinare una soluzione $y(x)$ in serie di potenze dell'equazione differenziale

$$y'' - \sqrt{5}xy' + 4\sqrt{5}y = 0$$

tale che $y'(0) = 0$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Si cerca la soluzione come serie di potenze

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k .$$

Le derivate di $y(x)$ sono:

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \qquad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2},$$

e di conseguenza $y(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale assegnata se vale l'identità

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - \sqrt{5}\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k + 4\sqrt{5}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0 .$$

Si osservi che si possono accorpare due serie, e quindi si ha

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - \sqrt{5}\sum_{k=0}^{\infty}(k-4) a_k x^k = 0 .$$

Ponendo $n = k-2$ nella prima serie, si ottiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - \sqrt{5}(n-4)a_n]x^n = 0 ,$$

da cui segue

$$a_{n+2} = \frac{\sqrt{5}(n-4)}{(n+2)(n+1)} a_n \qquad \forall n \in \mathbf{N}. \tag{1}$$

Poiché $a_1 = y'(0) = 0$, da (1) segue che tutti i coefficienti di indice dispari sono nulli. Inoltre, sempre da (1) segue $a_2 = -2\sqrt{5}a_0$, $a_4 = \frac{5}{3}a_0$ e $a_6 = 0$. Pertanto $a_{2k} = 0$ per ogni $k \geq 3$.
In conclusione, si ha

$$y(x) = a_0\Big(1 - 2\sqrt{5}x^2 + \frac{5}{3}x^4\Big), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

---

**3** - Determinare, se esistono, il minimo assoluto e il massimo assoluto della funzione $f(x,y,z) = y^2 - x(z+1)$ nell'insieme $C = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

La funzione $f$ è continua in $\mathbf{R}^3$, e di conseguenza per il teorema di Weierstrass $f$ ammette minimo assoluto e massimo assoluto nell'insieme compatto $C$.

Si osservi che $f \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$, e di conseguenza si può applicare il teorema di Fermat: i punti di estremo interni a $C$ sono necessariamente punti critici.
Per ogni $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ il gradiente di $f$ è dato da

$$\nabla f(x, y, z) = \big( -(z + 1), 2y, -x \big) ,$$

e si annulla nel punto $(0, 0, -1)$, che non è interno a $C$.
Per determinare gli estremi di $f$ sulla frontiera

$$\partial C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

di $C$, si può utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. I punti di $\partial C$ sono tutti regolari. La funzione lagrangiana è data da

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = y^2 - x(z + 1) - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) ,$$

e di conseguenza

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = -(z + 1) - 2\lambda x \\ \mathcal{L}_y = 2(1 - \lambda)y \\ \mathcal{L}_z = -x - 2\lambda z \\ \mathcal{L}_\lambda = -(x^2 + y^2 + z^2 - 1) . \end{cases}$$

Per risolvere il sistema $\nabla\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = \mathbf{0}$ occorre risolvere i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ z + 1 + 2\lambda x = 0 \\ x + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ z + 1 + 2\lambda x = 0 \\ x + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 . \end{cases}$$

Il primo sistema ha soluzioni $\big(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\big)$ e $\big(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\big)$, e di conseguenza $P_1 = \big(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\big)$ e $P_2 = \big(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\big)$ sono punti critici di $f$ vincolati a $\partial C$.
Per risolvere il secondo sistema, si osservi che per $x = 0$ si ha $z = -1$ e il punto $P_3 = (0, 0, -1)$ verifica il sistema con $\lambda = 0$.
Si supponga ora $x \neq 0$; ricavando $\lambda$ dalla seconda equazione e sostituendolo nella terza, si ottiene

$$\begin{cases} y = 0 \\ \lambda = -\dfrac{z + 1}{2x} \\ x^2 - z(z + 1) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 . \end{cases}$$

Sostituendo $y = 0$ e $x^2 = z(z + 1)$ nella quarta equazione, si ottiene $2z^2 + z - 1 = 0$, che ha soluzioni $z = -1$ e $z = \frac{1}{2}$.
Per $z = -1$ si avrebbe $x = 0$, da escludere, mentre per $z = \frac{1}{2}$ si ha $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; di conseguenza

$$P_4 = \Big(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}\Big) , \quad P_5 = \Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}\Big)$$

sono punti critici di $f$ vincolati a $\partial C$.
In conclusione, per determinare il minimo assoluto e il massimo assoluto di $f$ nell'insieme compatto $C$ si devono confrontare i valori

$$f(P_1) = f(P_2) = \frac{4}{3} , \quad f(P_3) = 0 , \quad f(P_4) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} , \quad f(P_5) = \frac{3\sqrt{3}}{4} ,$$

e di conseguenza

$$\min_{(x,y,z)\in C} f(x, y, z) = f(P_4) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} , \qquad \max_{(x,y,z)\in C} f(x, y, z) = f(P_1) = f(P_2) = \frac{4}{3} .$$