1 - Esprimere l'integrale

$$\int_0^{\frac{1}{3e}} \frac{\log(1-ex)}{x}\,dx$$

come somma di una serie numerica.

. . . .

La funzione $\log(1+t)$ è analitica,

$$\log(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1}, \quad |t| < 1,$$

e quindi per l'unicità dello sviluppo in serie di potenze, si ha

$$\frac{\log(1-ex)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(-e)^{n+1}}{n+1}x^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{n+1}}{n+1}x^n, \quad |x| < 1/e.$$

Pertanto, tenendo conto che l'intervallo di integrazione $\left[0, \frac{1}{3e}\right]$ è contenuto in $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$, per il teorema di integrazione termine a termine si ottiene

$$\int_0^{\frac{1}{3e}} \frac{\log(1-ex)}{x}\,dx = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2 3^{n+1}}.$$

---

2 - (a) Verificare le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per l'equazione differenziale

$$y' = y - \pi x y^2. \tag{1}$$

(b) Determinare, se esistono, tutte le soluzioni globali di (1).
(c) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y - \pi x y^2, \\ y(0) = -\dfrac{1}{\pi}, \end{cases}$$

e il suo intervallo massimale di definizione.

. . . .

(a) La funzione $f(x,y) = y - \pi x y^2$ è continua in $\mathbf{R}^2$. Inoltre, per ogni $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ si ha

$$f_y(x,y) = 1 - 2\pi x y,$$

e quindi, essendo $f_y(x,y)$ continua, la funzione f è localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile y, uniformemente rispetto alla variabile x; ne segue che sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per l'equazione differenziale assegnata.
(b) L'equazione differenziale assegnata è di Bernoulli e ammette la soluzione identicamente nulla $y = 0$. Per il teorema di esistenza e unicità locale ogni altra soluzione $y(x)$ di (1) non si annullerà in alcun punto e sarà sempre positiva o sempre negativa. Pertanto, posto $z = \frac{1}{y}$, l'equazione assegnata si trasforma nella seguente equazione lineare in z

$$z' = \pi x - z,$$

e il suo integrale generale è dato da

$$z(x) = Ce^{-x} + \pi(x-1), \qquad C \in \mathbf{R}.$$

Tenendo conto di $y = \frac{1}{z}$, si ha

$$y(x) = \frac{1}{Ce^{-x} + \pi(x-1)}, \qquad C \in \mathbf{R}.$$

Le soluzioni di (1) sono globali se sono definite in tutto $\mathbf{R}$, cioè se

$$z(x) = Ce^{-x} + \pi(x-1) \neq 0, \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Si osservi ora che $\lim_{x\to+\infty} z(x) = +\infty$ e $z(0) = C - \pi$, e quindi per $C \leq \pi$ la funzione z non è sempre strettamente negativa, da cui segue che per $C \leq \pi$ le soluzioni di (1) non sono globali.

Se invece $C > \pi$, per la disuguaglianza notevole $e^{-x} \geq 1 - x$, $x \in \mathbf{R}$, si ha

$$z(x) > \pi\big(e^{-x} + x - 1\big) \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbf{R}\,,$$

e di conseguenza per ogni $C > \pi$ le soluzioni di (1) sono definite in $\mathbf{R}$, e quindi sono globali.
(c) Imponendo la condizione iniziale $y(0) = -1/\pi$, si ha $C = 0$. Pertanto, la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{1}{\pi(x-1)}$$

e il suo intervallo massimale di definizione è $(-\infty, 1)$, in quanto $0 \in (-\infty, 1)$.

---

3 - (a) Determinare gli eventuali estremi liberi della funzione

$$f(x,y,z) = 2yz - (x+2e)^2 - y^2 - 3z^2 + 17\,.$$

(b) La funzione f ha il massimo assoluto?

....

In primo luogo si osservi che $f \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$, e di conseguenza si può applicare il teorema di Fermat: i punti di estremo sono necessariamente punti critici.
Per ogni $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ il gradiente di f è dato da

$$\nabla f(x,y,z) = \big(-2(x+2e), 2(z-y), 2(y-3z)\big)\,,$$

e si annulla nel punto $(-2e, 0, 0)$.
Per classificare il punto critico si possono utilizzare le condizioni sufficienti basate sul segno della forma quadratica associata alla matrice hessiana.
La matrice hessiana di f calcolata nel generico punto $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ è data da

$$D^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Si osservi che

$$\big|D^2 f(x,y,z) - \lambda I\big| = -(2+\lambda)[(2+\lambda)(6+\lambda) - 4] = -(2+\lambda)(\lambda^2 + 8\lambda + 8)$$

e di conseguenza $\big|D^2 f(x,y,z) - \lambda I\big| = 0$ se e solo se $\lambda = -2\,, -4 \pm \sqrt{8}$. Per ogni $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ gli autovalori della matrice $D^2 f(x,y,z)$ sono negativi, e quindi $D^2 f(x,y,z)$ è definita negativa. Pertanto la funzione f è strettamente concava in $\mathbf{R}^3$ e di conseguenza il punto critico $(-2e, 0, 0)$ è punto di massimo assoluto per f in $\mathbf{R}^3$.
Si può anche stabilire che la matrice $D^2 f(x,y,z)$ è definita negativa valutando il segno dei minori principali di nord-ovest: infatti si ha

$$-2 < 0\,, \qquad \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0\,, \qquad \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix} = -16 < 0\,.$$

In conclusione, il valore

$$f(-2e, 0, 0) = 17$$

è il massimo assoluto per f.