1 - Determinare raggio di convergenza, insieme di convergenza e somma della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7^{2n-1}(2n)!}\, x^{2n}\,.$$

....

Dallo sviluppo in serie di Taylor della funzione $\cos t$

$$\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, t^{2n}\,, \quad t \in \mathbf{R}\,,$$

segue che la serie assegnata ha raggio di convergenza $+\infty$, insieme di convergenza $\mathbf{R}$ e la somma è data da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7^{2n-1}(2n)!}\, x^{2n} = 7\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7^{2n}(2n)!}\, x^{2n} = 7\cos\frac{x}{7} - 7\,, \qquad x \in \mathbf{R}\,.$$

---

2 - Determinare una soluzione $y(x)$ in serie di potenze dell'equazione differenziale

$$y'' + \pi^2 x y' - 3\pi^2 y = 0$$

tale che $y(0) = 0$.

....

Si cerca la soluzione come serie di potenze

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k\,,$$

dove si è tenuto conto del fatto che $a_0 = y(0) = 0$.
Le derivate di $y(x)$ sono:

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}\,, \qquad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}\,,$$

e di conseguenza $y(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale assegnata se vale l'identità

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} + \pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k - 3\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = 0\,.$$

Si osservi che si possono accorpare due serie, e quindi si ha

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} + \pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} (k-3) a_k x^k = 0\,.$$

Cambiando la variabile nella prima serie, ponendo $n = k-2$, si ottiene

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + \pi^2(n-3)a_n]x^n = 0\,,$$

da cui segue

$$a_2 = 0, \qquad a_{n+2} = -\frac{\pi^2(n-3)}{(n+2)(n+1)} a_n \qquad \forall n \geq 1\,. \tag{1}$$

Poiché $a_0 = a_2 = 0$, da (1) segue che tutti i coefficienti di indice pari sono nulli. Inoltre, sempre da (1) segue $a_3 = \dfrac{\pi^2}{3} a_1$ e $a_5 = 0$. Pertanto $a_{2k+1} = 0$ per ogni $k \geq 2$.
In conclusione, si ha

$$y(x) = a_1\Big(x + \frac{\pi^2}{3}x^3\Big)\,.$$

---

3 - Data la funzione

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2+1} + e^y(y-2) + \pi z^2$$

(i) determinare gli eventuali punti critici e classificarli.
(ii) Dimostrare che f è strettamente convessa nell'insieme $C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : y > 0\}$.

(iii) Provare che f ha minimo assoluto in C.

. . . .

(i) Per ogni $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ il gradiente di f è dato da

$$\nabla f(x, y, z) = \left(x(x^2 + 1)^{-1/2}, e^y(y - 1), 2\pi z\right),$$

e si annulla nel punto $(0, 1, 0)$.
Per classificare il punto critico si possono utilizzare le condizioni sufficienti basate sul segno della forma quadratica associata alla matrice hessiana.
La matrice hessiana di f calcolata nel generico punto $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ è data da

$$D^2 f(x, y, z) = \begin{pmatrix} (x^2 + 1)^{-3/2} & 0 & 0 \\ 0 & ye^y & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi \end{pmatrix}.$$

Si osservi ora che

$$D^2 f(0, 1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi \end{pmatrix},$$

e di conseguenza gli autovalori di $D^2 f(0, 1, 0)$ sono 1, e e 2π, e quindi $(0, 1, 0)$ è punto di minimo locale.
(ii) f è strettamente convessa nell'insieme $C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : y > 0\}$ in quanto $D^2 f(x, y, z)$ è definita positiva per ogni $(x, y, z) \in C$.
(iii) Poiché $(0, 1, 0) \in C$ è punto critico per f strettamente convessa in C, si ha che $(0, 1, 0)$ è punto di minimo assoluto di f in C e $f(0, 1, 0) = 1 - e$ è il minimo assoluto di f in C.